

**MATERIALES COMPLEMENTARIOS DE
MATEMÁTICAS 3º ESO
VERSIÓN PARA DESCARGA**

© 2007 de los autores:

Elena Lavado Barquero

Fernando López Oliva

Raquel Rincón Sanz

Juan Luis Roldán Calzado

MATERIALES COMPLEMENTARIOS DE MATEMÁTICAS 3º ESO

Elena Lavado Barquero
Fernando López Oliva
Raquel Rincón Sanz
Juan Luis Roldán Calzado

INTRODUCCIÓN

Los cambios en las leyes que rigen la Educación Secundaria provocan que haya que buscar materiales que se adecuen a lo exigido por la norma. En ese sentido este volumen pretende servir de complemento a los habituales libros de texto de la asignatura, proporcionando al profesor de la materia herramientas que normalmente aparecen con menos peso en los textos, como lecturas, aplicaciones multimedia o actividades que permitan desarrollar las competencias del alumnado de Matemáticas. Al mismo tiempo se ofrecen, de cada tema, colecciones de ejercicios con sus soluciones, para su aplicación en el aula o en la elaboración de exámenes.

De esta forma, cada una de las unidades se divide en las siguientes secciones:

- **Ejercicios:** una amplia colección de ejercicios relativos a la unidad
- **El Rincón Multimedia:** aplicación de diferentes programas informáticos como Derive, Cabri o Excel al estudio de conceptos de la unidad
- **Aplica lo que sabes:** actividades de aplicación a la vida real que permiten el desarrollo de las Competencias del alumnado en Matemáticas.
- **Alrededor de las matemáticas:** como su nombre indica, toda una serie de contenidos de tipo divulgativo que complementan los de tipo técnico, a la vez que sirven para fomentar la lectura.

Al final del libro se incluyen las soluciones de los ejercicios y actividades propuestos a lo largo del libro.

UNIDAD 1. NÚMEROS RACIONALES

FRACCIONES. CONCEPTO Y TIPOS

1. Indica cuál es el menor conjunto numérico al que pertenecen los siguientes números:

$$-3, 5, \frac{3}{4}, 1, \frac{7}{2}.$$

2. Representa, utilizando divisiones en rectángulos, las fracciones:

$$\frac{3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{5}{3}, \frac{12}{5}, \frac{3}{3}.$$

3. ¿Podrías explicar por qué $-\frac{8}{4} \neq \frac{-8}{-4}$?

4. Halla la fracción irreducible de:

a) $\frac{28}{70}$

b) $\frac{45}{27}$

c) $\frac{150}{42}$

d) $\frac{360}{420}$

5. Obtén dos fracciones por amplificación y otras dos por simplificación equivalentes a:

a) $\frac{18}{42}$

b) $\frac{48}{20}$

6. Comprueba, por el método que prefieras, si los siguientes pares de fracciones son o no equivalentes:

a) $\frac{7}{3}$ y $\frac{21}{9}$

b) $\frac{12}{15}$ y $\frac{8}{10}$

c) $-\frac{6}{8}$ y $\frac{9}{-12}$

d) $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{4}$

7. ¿Puede ser una fracción igual que su inversa? Razona la respuesta con un ejemplo

8. Escribe 2 fracciones mayores y otras dos menores que $\frac{4}{7}$ con denominador 84

9. Halla el valor de la incógnita para que las siguientes fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{2}{x}, \frac{11}{33}$

b) $\frac{10}{6}, \frac{a+2}{15}$

c) $\frac{1}{z}, \frac{z}{4}$

d) $\frac{-3}{b}, \frac{2}{-6}$

10. Juan y Pedro están realizando un viaje. A Juan le quedan los $\frac{4}{10}$ del camino por recorrer y a Pedro los $\frac{6}{15}$.
¿A quién le queda más distancia por recorrer?

ORDEN Y REPRESENTACIÓN DE FRACCIONES

11. Representa gráficamente y ordena las siguientes fracciones: $-\frac{1}{4}, \frac{7}{5}, \frac{2}{3}$

12. Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones, reduciendo previamente a común denominador:

a) $\frac{6}{7}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{10}, \frac{3}{16}, \frac{5}{18}$

c) $-\frac{5}{6}, -\frac{7}{9}, -\frac{10}{3}$

d) $\frac{1}{20}, \frac{3}{10}, \frac{5}{8}$

OPERACIONES CON FRACCIONES

13. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{2} + \frac{7}{5} - \frac{9}{2}\right) =$

b) $\frac{5}{7} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) =$

c) $\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right) : \left(2 + \frac{2}{7}\right) =$

d) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{5} =$

e) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{7}{2} - \frac{6}{5} =$

f) $\left(\frac{3}{7} - 4 \cdot \frac{-1}{3}\right) : \frac{5}{2} - 1 =$

g) $\left(3 - \frac{1}{4} - \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{4}{15} : \left[2 - \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{10}\right) \cdot 5\right] =$

h) $\frac{7 - \frac{1}{4}}{2 - \frac{2}{3}} : \frac{\frac{1}{4} - 7}{\frac{2}{3} - 2} =$

14. ¿Cuánto es el doble de la suma de la tercera parte y de los tres quintos de 60?

15. ¿Qué es mayor, la mitad de un cuarto o un cuarto de la mitad? Razona la respuesta gráficamente.

16. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 =$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

c) $\left(\frac{7}{5}\right)^3 : \left(\frac{5}{7}\right)^{-2} =$

d) $\frac{15^{-2} \cdot 3^3}{5^{-4} \cdot 81} =$

17. Escribe los números $\frac{1}{25}$, $\frac{-125}{27}$, $\frac{81}{16}$ como:

a) Producto de dos potencias de la misma base.

b) Cociente de potencias de la misma base

NÚMEROS DECIMALES. CLASIFICACIÓN Y ORDENACIÓN

18. Clasifica los siguientes números en decimales exactos o periódicos, indicando en su caso el periodo y el anteperiodo:

a) 3,175

b) $3,1\overline{75}$

c) $3,1\overline{75}$

d) 2,03030303...

19. Escribe, utilizando sólo las cifras 0, 1 y 2, dos números decimales exactos, dos periódicos puros y dos periódicos mixtos.

20. Halla las fracciones generatrices de los números:

a) 2,353535...

b) 2,35

c) 2,35555...

d) 2,353333...

21. Escribe dos fracciones comprendidas entre $3,\widehat{1}$ y $\frac{31}{9}$

OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

22. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{2}{5} + 2,6\right) \cdot 2 =$

b) $(1,23 - 12,3 : 8,2) \cdot 0,45 =$

c) $\frac{3}{4} - 0,2\bar{3} =$

d) $\frac{9}{5} \cdot 0,3^2 =$

e) $\left(3,4 - \frac{2}{5}\right) : \left(-\frac{2}{3} + 0,4\right) =$

23. Cinco amigos hacen un viaje en un coche de gasoil. Si el consumo medio es de 6,1 litros cada 100 kilómetros y el litro de gasóleo está a 1,07 €, calcula cuánto pagará cada amigo si el viaje es de 750 kilómetros.

24. Calcula el resultado, en notación científica, de:

a) $(3,1 \cdot 10^9) \cdot (2,51 \cdot 10^{12}) =$

b) $5 \cdot 10^8 : (2,8 \cdot 10^{-6}) =$

25. Sabiendo que el radio de nuestra Galaxia es de unos $1,42 \cdot 10^{26}$ m y que la velocidad de la luz es, aproximadamente, de 300.000 km/s, calcula cuántos años tardaría un haz de luz en recorrer toda la Galaxia de un extremo a otro.

26. Halla el valor de los siguientes porcentajes:

a) 20% de 50

b) 50% de 20

c) 20% de 20

d) 12,5 % de 80.

27. ¿Qué porcentaje representará una fracción en la que el numerador es igual que el denominador?

28. Javier ha realizado el sábado la mitad de los ejercicios que tenía para el fin de semana. El domingo ha hecho las dos terceras partes de lo que le quedaba, llevando sin hacer 3 ejercicios. ¿Cuántos tenía para el fin de semana?

29. Un pintor se compromete a pintar la fachada de un edificio en 12 días; otro en 15 y un tercero en 18 días.
¿Qué parte de la fachada pinta cada uno por separado?
Si trabajasen juntos, ¿cuánto pintarían en un día?
30. Una receta para hacer un bizcocho dice que la tercera parte ha de ser de azúcar y que las dos quintas partes, de harina. Para 6 personas recomienda echar 250 grs de azúcar. Como se han apuntado dos amigos más, ¿cuánta harina se necesitará para el bizcocho?
31. Tres amigos están haciendo unos problemas de matemáticas. El primero lo hace él solo en 4 horas; el segundo, en 8 y el último en 5 horas
- a) ¿Qué parte de los problemas hace cada uno en una hora?
 - b) ¿Qué parte hacen los 3 si trabajan a la vez en una hora?
 - c) ¿Cuánto tardarían los 3 si hicieran los problemas juntos
32. Un alumno ha obtenido a lo largo de un trimestre unas calificaciones de 6 y 4 en dos pruebas, respectivamente. Para hallar la media, al haber dos notas, multiplicaremos cada una de ellas por $\frac{1}{2}$, pues cuentan o “pesan” lo mismo. Así, tendremos un $\frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 5$ de media.
- a) ¿Cuál sería la nota media si la segunda nota pesara el doble que la primera?
 - b) ¿Y si la primera tuviera un valor doble y la segunda un valor tres veces mayor?
 - c) Sabiendo que su calificación media ha sido de un 4,4 ¿cuánto ha pesado la segunda nota si la primera cuenta sólo una vez?

El Rincón Multimedia

CALCULADORA

Para hallar rápidamente potencias con la calculadora, usamos la tecla $\boxed{\wedge}$.

Por ejemplo, para calcular 5^3 , tecleamos $5 \boxed{\wedge} 3 \boxed{=}$ 125.

Si el exponente es una fracción, por ejemplo, $3^{\frac{1}{2}}$ se escribirá $3 \boxed{\wedge} \left(\frac{1}{2}\right)$.

FRACCIONES EQUIVALENTES Y EXCEL

Podemos utilizar la hoja de cálculo para comprobar si dos fracciones son o no equivalentes:

1. Escribimos los numeradores de las dos fracciones en las celdas A1 y B1, y los denominadores en A2 y B2, respectivamente.

2. En otra celda, por ejemplo en A4 escribimos, utilizando la notación correspondiente en Excel, la formula:

SI(A1/A2=B1/B2;"FRACCIONES EQUIVALENTES";"NO SON EQUIVALENTES")

	A	B	C	D
1	3	6		
2	4	8		
3				
4	FRACCIONES EQUIVALENTES			
5				
6				

Que quiere decir: “Si al dividir A1 entre A2 nos da igual que B1 entre B2, queremos que aparezca escrito “FRACCIONES EQUIVALENTES” y si no, que ponga “NO SON EQUIVALENTES”

OPERACIONES COMBINADAS CON DERIVE

1. Si queremos calcular el valor de la expresión: $\frac{3}{4} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right)$ escribiremos en la ventana **Entrada de**

Expresiones:

$\sqrt{\quad} = \leq \approx \neq \frac{3}{4}-2*(1/2+5/3)$

2. Al darle a la tecla Intro o al pulsar el botón , aparecerá en la ventana **Álgebra:**

#1: $\frac{3}{4} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right)$

3. Al pulsar el botón $\approx$ o al $=$, lo que es lo mismo, ir al menú y seleccionar **Simplificar-Normal** o **Simplificar-Aproximar**, obtendremos el valor numérico en forma de fracción y en forma decimal con una aproximación que nosotros fijemos y que por defecto viene con 10 decimales. Obtenemos las líneas #2 y #3.

Podemos establecer el número de dígitos que queramos en **Definir-Preferencias de Salida**.

Podemos calcular el mcm y mcd. de los números que queramos, factorizar números enteros...

#1: $\frac{3}{4} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right)$

#2: $-\frac{43}{12}$

#3: -3.583333333

Aplica lo que sabes

CARNET POR PUNTOS

El 1 de julio de 2006 entró en vigor el permiso de conducir por puntos. Este sistema se basa en que cada conductor parte con una serie de puntos (12 si es un conductor con más de 3 años de experiencia y 8 si tiene menos de 3 años de conducción o ya ha perdido todos los puntos alguna vez) y los va perdiendo cada vez que cometa una infracción.

1. Una de las infracciones más usuales es el exceso de velocidad. Este es un resumen de los puntos que puede perder un conductor según el exceso de velocidad

Puntos	Motivo de la sanción
6	Superar en un 50% o más el límite de velocidad si eso supone superarlo al menos en 30 km/h.
4	Exceder los límites en más de 40 km/h si ello no supone un exceso del 50%
3	Exceder los límites en más de 30 km/h (pero no más de 40 km/h) si ello no supone un exceso del 50%
2	Circular entre 20 km/h y 30 km/h por encima del límite

Teniendo en cuenta esta información, ¿cuáles serían las sanciones en las situaciones que recoge la tabla de la derecha?

Límite de velocidad (km/h)	Velocidad del conductor (km/h)	Puntos a restar
90	120	
120	180	
100	140	
50	90	

2. Conducir con una tasa de alcohol superior a 0,50 mg/l en aire espirado supone perder 6 puntos. Esa cantidad de alcohol en sangre se obtiene al beber un litro de cerveza o dos copas. Si una persona ha bebido tres botellines de cerveza (cada uno tiene 20 cl) y una copa, ¿qué tasa de alcohol en sangre podría tener?

3. Sólo en el primer fin de semana de entrada en vigor del permiso por puntos, se tramitaron 4895 por infracciones graves o muy graves en carretera. De ellas, el 28,87% fueron por conducir con una tasa de alcohol superior a la permitida. ¿Cuántos conductores fueron sancionados por este tipo de infracción?

4. De los 4895 primeros sancionados, el 88,3% eran hombres. Sin embargo en España, los hombres suponen sólo un 62% del total de conductores. Está claro que, al menos en ese primer fin de semana, los hombres cometieron más infracciones. Porque, si hombres y mujeres cometieran infracciones por igual, ¿cuántas de las personas que perdieron puntos ese primer fin de semana hubiera sido esperable que fueran hombres?

5. Normalmente el exceso de velocidad se detecta mediante el uso de radares tanto fijos como móviles. Pero podría haber otros métodos relativamente sencillos. Imagina una autopista de peaje en la que se tuviera que recoger el ticket en la entrada para después entregarlo para pagar en la salida. ¿Cómo podría detectarse si un conductor ha sobrepasado con seguridad el límite de velocidad?

Alrededor de las matemáticas

CRIPTOGRAFÍA

La criptografía es el arte de cifrar y descifrar mensajes utilizando técnicas matemáticas de manera que pueda intercambiarse información y sólo puedan leerla aquellas personas a las que va dirigida.

A lo largo de la historia se han inventado muchas formas de encriptar la información, bien cambiando el orden de las letras del mensaje (transposición), bien sustituyendo cada elemento por otro diferente (sustitución). Uno de los ejemplos más antiguos de sustitución es el que utilizó Julio César para encriptar sus mensajes, que se basaba en sustituir cada letra por la que ocupara n lugares después en el alfabeto.

Otra forma de cifrar la información es sustituir cada letra por un símbolo que puede ser otra letra, un número o un signo totalmente inventado. Un clásico ejemplo lo tenemos en el cuento de Conan Doyle “La aventura de los bailarines” en el que Sherlock Holmes tiene que descifrar un mensaje formado por unos muñequitos en diferentes posiciones. El inconveniente de este tipo de método es que se puede descifrar teniendo en cuenta la frecuencia con que cada letra aparece en general en cualquier texto.

Durante la Segunda Guerra de Mundial, los métodos se perfeccionaron. El servicio secreto alemán creó *Enigma*, una máquina de codificación formada por cilindros por los que rotaba cada letra. La codificación cambiaba con cada letra que entraba en la máquina, por lo que las posibilidades eran tantas que, ni aun teniendo la máquina se podía descifrar el mensaje, era necesario saber cuál había sido la posición inicial de los cilindros.

1. Busca cuál es el origen etimológico de la palabra *criptografía*.
2. Escribe tu nombre con el método de encriptación de Julio César con $n=3$
3. Investiga sobre el ordenador *Colossus* y su papel en descifrar los mensajes de la máquina *Enigma*.
4. Lee el cuento “La aventura de los bailarines” de Conan Doyle

SEGMENTOS INCONMENSURABLES

En la época de Pitágoras se pensaba que la relación entre cualquier par de segmentos se podía expresar con una fracción de números enteros. El descubrimiento de que la diagonal de un cuadrado y su lado no cumplían esa propiedad (su cociente es $\sqrt{2}$, que no puede expresarse en forma de fracción), causó una gran conmoción.

GIGABYTE

El prefijo “giga” lo hemos oído muchas veces al hablar de la capacidad de los discos duros de nuestros ordenadores: 120 gigas, 160 gigas... Aunque en realidad deberíamos decir “gigabytes”. Un gigabyte equivale a aproximadamente a mil millones (10^9) de bytes.

EL RETO

Trata de descifrar este código, de manera que al sustituir cada letra por un número, la suma sea correcta.

	G	O	T	A
	G	O	T	A
	G	O	T	A
	G	O	T	A
+	G	O	T	A
	A	G	U	A

UNIDAD 2. NÚMEROS REALES

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

1. Indica el menor conjunto numérico (naturales, enteros, racionales o irracionales) al que pertenecen los siguientes números reales:

a) -25

b) $3,\overline{2}$

c) π

d) 4,2389104...

e) 108

f) $\frac{2}{7}$

2. Construye, indicando el proceso seguido, 3 números irracionales.

3. Aproxima por exceso y por defecto, hasta las centésimas, los siguientes números reales:

a) 50,147

b) $3,\overline{26}$

c) $\sqrt{5}$

d) -4,151551555....

4. Utiliza la calculadora para aproximar hasta la tercera cifra decimal las siguientes operaciones:

a) π^3

b) $\pi^2 - \pi$

c) $3\pi - 1$

d) $\frac{\pi^2}{\pi + 1}$

5. ¿Verdadero o falso? Razona la respuesta.

- Todos los números reales son racionales.
- Existen números racionales sin periodo.
- El número 3,797997999... es periódico, pues se repiten los 7 y los 9.
- La suma de dos números irracionales puede quedar un número racional.

6. Escribe 3 números reales entre 1,9 y $\sqrt{4}$

7. Halla el valor de:

a) $|12|$

b) $|0|$

c) $|-0,5|$

d) $3+|-2|$

8. Comprueba si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

a) $|15-18|=|15|-|18|$

b) $|0-3|=-3$

c) $5+|-2|=3$

d) $|3 \cdot (-4)|=12$

9. ¿Son ciertas o falsas las siguientes igualdades? Razona la respuesta.

a) $|8+10|=|8|+|10|$

b) $|4-15|=|15-4|$

c) $|3-8|=3-8$

d) $|(-2) \cdot (-3)|=|-2| \cdot 3$

e) $-|2|=|-2|$

f) $\left|\frac{-3}{5}\right|=-\frac{3}{5}$

10. Completa con el signo de “<”, “=” o “>” las relaciones que hay a continuación:

a) $|-2| \dots 2$

b) $-3 \dots |-3|$

c) $-|7| \dots 7$

d) $|8| \dots -8$

e) $|-7+6| \dots |-7|+|6|$

f) $|2-5| \dots |-2+5|$

g) $|4| \cdot |-2| \dots -8$

h) $-3 \cdot |-5| \dots |(-3) \cdot (-5)|$

11. Comprueba si la igualdad $|a + b| = |a| + |b|$ es cierta para los siguientes valores de a y b .

a) $a = 3$; $b = 4$

b) $a = -3$; $b = 4$

c) $a = 3$; $b = -4$

d) $a = -3$; $b = -4$

¿Qué puedes concluir?

ERRORES Y APROXIMACIONES

12. Indica el error absoluto cometido al aproximar el número 5,81724 por:

a) 5,82

b) 5,8172

c) 5,818

d) 5,9

13. ¿Cuál es el error relativo que se comete al aproximar el número e por 2,713?

14. Redondea los siguientes números hasta las centésimas:

a) 7,1894

b) $\sqrt{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $3,1\overline{4}$

15. ¿Cuántos latidos, aproximadamente, habrá dado el corazón de una persona de 78 años de edad, suponiendo una media de 82 latidos/minuto? Expresa el resultado con tres cifras significativas.

16. Habitualmente decimos que 1 millón de las antiguas pesetas equivalen a 6000 euros. ¿Qué error absoluto se comete de este modo? (1€=166,386 ptas)

17. Sabiendo que $\sqrt{2} \approx 1,41421356\dots$, ¿cuáles de las siguientes aproximaciones están de $\sqrt{2}$ a menos de una milésima?

a) 1,415

b) 1,424

c) 1,4141

d) 1,413

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

18. Representa gráficamente los siguientes números reales, con el método más conveniente en cada caso:

a) $\frac{3}{5}$

b) 2,3105463

c) $\sqrt[3]{7}$

d) -4

19. Representa los tres primeros intervalos encajados del número e

20. Representa gráficamente

a) $\sqrt{17}$

b) $\sqrt{37}$

c) $\sqrt{41}$

d) $\sqrt{8}$

21. Utiliza el Teorema de Pitágoras para representar, de dos formas distintas, $\sqrt{50}$

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

22. Realiza las siguientes operaciones, expresando el resultado con tres cifras decimales:

a) e^3

b) $3,5 + \sqrt[3]{2}$

c) $\frac{1}{e}$

d) $\frac{11}{3} - \pi$

23. Calcula, expresando el resultado en forma radical:

a) $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$

b) $\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

c) $5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{7}$

d) $4\sqrt{8} : \sqrt{2}$

24. Verdadero o falso? Justifica las respuestas:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

b) $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$

d) $\sqrt[4]{5} : \sqrt[3]{5} = \sqrt{5}$

25. Extrae factores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{24}$

b) $\sqrt{125}$

c) $\sqrt{63}$

d) $\sqrt{98}$

e) $\sqrt[3]{81}$

f) $\sqrt[4]{1024}$

g) $\sqrt[3]{625}$

h) $\sqrt[5]{512}$

26. Introduce factores en:

a) $3\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{2}$

c) $2\sqrt[4]{3}$

d) $4\sqrt[3]{5}$

27. Realiza las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{8} + 5\sqrt{2} - \sqrt{50}$

b) $2\sqrt{12} - 5\sqrt{3} + \sqrt{48}$

c) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + \sqrt{5}$

e) $\sqrt{2} - (3\sqrt{2} - 4\sqrt{2})$

f) $\sqrt[4]{3} + 2\sqrt[4]{3}$

28. ¿Puede quedar un número racional al multiplicar dos raíces no exactas? ¿Y al dividir las? Pon un ejemplo que aclare la respuesta en cada caso.

29. ¿Qué error relativo es menor: el que se comete al aproximar el área de un campo de fútbol de 102 m de largo por 56 m de ancho por 6000 m^2 o el cometido al aproximar la superficie de una hoja DIN A-4 por $0,0625 \text{ m}^2$?

El Rincón Multimedia

CALCULADORA

Podemos establecer con cuántos decimales trabajar a la hora de trabajar con la calculadora. Utilizaremos para ello el modo FIX con **MODE FIX** (número de decimales). Por ejemplo, si establecemos MODE FIX 5 aparecerá, si realizamos la siguiente operación:

$$25:13 = 1,92308$$

Realmente sería 1,923076923..., pero redondea hasta el orden fijado -5, en nuestro caso. Para deshacer el modo fijado, seleccionamos el modo normal: **MODE NORM**.

LOS REDONDEOS Y EXCEL

Hay diversas funciones para, dado un número cualquiera, buscar aproximaciones.

Introducimos un número en la celda B. En B5, utilizamos la función **=ENTERO(B1)**, para averiguar el número entero inferior al número escrito en B1 (es decir, su aproximación a las unidades por defecto).

En B7, escribimos la fórmula anterior, pero sumándole 1 para obtener la aproximación por exceso.

Utilizamos en B9 la función condicional **=SI()**. En ella, tomando como base los errores cometidos al aproximar, seleccionaremos B5 o B7. Escribiremos la traducción de:

=SI(el error –o diferencia-entre B5 y B1 es menor que el error entre B7 y B1; elegiremos B5; si no, B7). Es decir

$$=SI(B1-B5 < B7-B1; B5; B7)$$

Por último, en la celda B12, utilizando la función **=REDONDEAR(B1;0)** -donde 0 expresa el número de decimales que queremos en el redondeo-, comprobamos que se obtiene el mismo resultado.

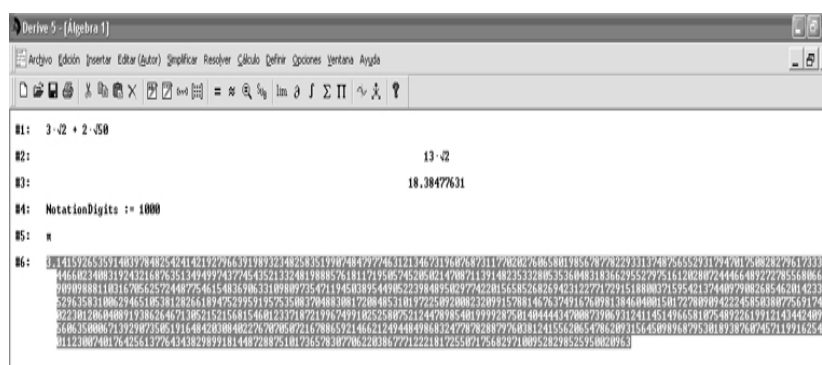
	A	B
1	Introduce un número:	15,46280199
2		
3		
4		
5	Aproximación por defecto	15
6		
7	Aproximación por exceso	16
8		
9	Redondeo	15
10		
11		
12	Otra forma: Función REDONDEAR	15
13		
14		

OPERACIONES CON RADICALES Y DERIVE

Escribimos en la Entrada de Expresiones: $3\sqrt{2} + 2\sqrt{50}$ (pulamos Intro). Si seleccionamos el botón “=” o vamos al Menú **Resolver-Expresión**, obtendremos $13\sqrt{2}$ (ha extraído factores y simplificado el resultado)

Si quisiéramos una aproximación decimal, pulsa “≈”. Por defecto, está configurado para que aparezcan 10 dígitos.

Se puede cambiar al número de decimales que quieras en **Definir-Preferencias de Salida-Dígitos**. Usa esta opción para ver, por ejemplo, 1000 decimales del número π .



Aplica lo que sabes

EL REDONDEO DEL EURO

Uno de los casos más claros en los que se tuvo que hacer uso del redondeo en la vida cotidiana fue el cambio que hubo de moneda en 2002, al pasar de pesetas a euros.

1. El tipo de cambio se estableció en $1 \text{ €} = 166,386 \text{ ptas.}$ Fue una cifra afortunada ya que permitía una aproximación bastante cómoda: $6 \text{ €} = 1000 \text{ ptas.}$ Ahora bien, ¿qué error cometíamos con dicha aproximación?

2. Otros países no tuvieron tanta suerte y la equivalencia entre el euro y su moneda anterior no permitía aproximaciones sencillas. En Portugal sí, ya que la equivalencia fue de $1 \text{ €} = 200,482 \text{ escudos.}$ ¿Qué equivalencia podría usarse de forma natural? ¿Qué error relativo tendría esa aproximación?

3. Para facilitar los cálculos durante los primeros meses en los que estuvo en vigor el euro, se elaboraron tablas de conversión, tablas que sin embargo, contenían datos llamativos. Por ejemplo, al convertir las monedas de euro más pequeñas (de 1, 2 y 5 céntimos) a pesetas, se obtenía la tabla de la derecha.

euros	pesetas
0,01	2
0,02	3
0,05	8

Comprueba que las aproximaciones son correctas y encuentra qué contradicciones numéricas contiene.

4. Los errores de redondeo también podrían ser significativos en grandes cantidades. Al convertir 100.000 ptas. a euros el cambio correcto sería 601,01 €. ¿Perdemos dinero con ese cambio? Dada la cantidad en euros no sería descabellado aproximarla por 601 o incluso 600 €. ¿Cuántas pesetas perderíamos en cada caso?

5. Hay otro tipo de redondeo que podríamos llamar de tipo “social”. Si un café valía 125 ptas. su conversión a euros sería de 0,72 € pero, al tratarse de una cifra poco cómoda lo normal es que subiera a 0,80 €. ¿Cuál sería entonces el porcentaje de subida de ese café?

6. Uno de los productos que experimentó más subida con el cambio al euro fue el pan, cuyo precio sufrió un incremento del 23%. ¿Qué precio en euros tendría una barra que antes de la subida costaba 40 ptas.?

7. Busca o pregunta a tu alrededor sobre otros productos a los cuales la entrada en vigor de la nueva moneda afectó de manera significativa. Compara los precios antes y después y obtén conclusiones al respecto.

Alrededor de las matemáticas

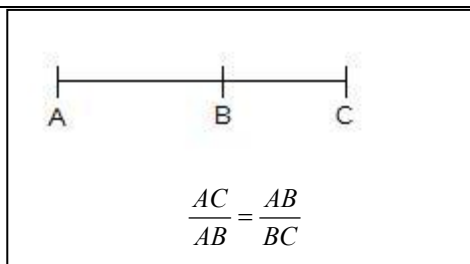
EL NÚMERO ÁUREO

En tiempos de Pitágoras, entre otros muchos problemas, se enfrentaron al de dividir un segmento en “media y extrema razón”, es decir, en dos partes desiguales de forma que la razón entre el segmento total y su parte mayor fuera la misma que entre la parte mayor y la menor. Se demuestra que, para que se cumpla esta propiedad, la razón entre la parte mayor y

la menor debe ser igual al número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que se denomina “número áureo”.

Lo sorprendente es que este número, de apariencia tan complicada, aparece de forma espontánea en muchos elementos naturales como la distribución de las hojas en algunas plantas, la estructura de los girasoles o la distancia del ombligo a la cabeza y los pies.

El rectángulo cuyos lados son tales que su razón es igual al número áureo se considera un ejemplo de “buena proporción”. Así, se utilizó en obras de arte desde la época de los griegos (por ejemplo en la fachada del Partenón) y hoy se utiliza en objetos tan habituales como las tarjetas de crédito o el carné de identidad.



CUESTIONES

1. ¿Por qué el número áureo es irracional?
2. Aproxima el número áureo hasta las milésimas
3. Mide los lados de una tarjeta de crédito o de un DNI y comprueba que su cociente se aproxima al número áureo.
4. Investiga sobre el Partenón y su “buena proporción”
5. Busca en qué otras situaciones de la vida real aparece el número áureo.

APROXIMACIONES DE π

A lo largo de la historia se ha intentado aproximar el valor de π con mayor o menor éxito:

- En el Antiguo Testamento ya existía una aproximación, aunque muy pobre: simplemente 3.
- Los babilonios lo estimaron como $25/8$
- Los griegos utilizaron una aproximación con una fracción muy sencilla: $22/7$.
- En la civilización china usaron $355/113$, que ya tiene 6 cifras decimales correctas
- Hoy en día, que se sabe que π tiene infinitos decimales, estimar el mayor número posible de ellos supone un test para comprobar la potencia de los ordenadores.

UNIDAD 3. PROPORCIONALIDAD

PROPORCIONALIDAD SIMPLE

1. Determina si entre las siguientes magnitudes existe una relación de proporcionalidad y, si es así, si es directa o inversa.

- a) Número de personas que acuden a ver una película y dinero recaudado por el cine.
- b) Altura de un triángulo de base 5 cm. y área del triángulo.
- c) Hipotenusa de un triángulo de cateto 5 cm. y longitud del otro cateto.
- d) Número de plazos en que se divide un pago (sin recargo) e importe de cada plazo

2. Si en tu instituto se han matriculado 200 alumnos de 3º ESO, ¿qué tipo de proporcionalidad existirá entre el número de grupos de 3º ESO que se establezcan y el número de alumnos que habrá de media en cada grupo? Explica tu respuesta

3. Calcula el valor de a para que 4, 6, 18 y a , en ese orden, formen una proporción

4. Un representante de futbolistas se lleva la décima parte del importe de cada traspaso en concepto de comisión. ¿Cuál es la razón entre lo que se lleva él y lo que se llevan sus jugadores? ¿Qué comisión se llevará en un traspaso de 360.000 €?

5. Una empresa de autobuses tiene que hacer la puesta a punto a todos sus vehículos. Si contrata 7 mecánicos tardan 10 días en hacer las revisiones. ¿Cuántos días tardarían en hacer el mismo trabajo 5 mecánicos?

6. Una destructora de papel tarda 8 minutos en destruir 200 folios. ¿Cuánto tiempo necesitará para destruir 350 folios?

7. En el presupuesto de un instituto, 12 de cada 100 € se destinan a pagar los distintos suministros, mientras que 44 de cada 100 € destinado a suministros se dedica a pagar la electricidad. ¿Qué fracción del dinero total se dedica al pago de electricidad?

8. Si los $\frac{2}{3}$ de un número valen 28, calcula sus $\frac{3}{7}$

9. ¿Qué relación existe entre el número de baldosas necesarias para cubrir el suelo de una cierta habitación y la superficie de cada baldosa? ¿Y el número de baldosas y la longitud del lado de cada baldosa, son proporcionales?
10. Calcula la altura que debe tener un triángulo de base 6 cm. para que su área sea la misma que la de un triángulo de base 12 cm. y altura 4 cm.

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

11. En una fábrica de puertas trabajan 120 obreros en jornadas de 8 horas diarias, para fabricar 40 puertas al día. Ahora tienen un encargo de 180 puertas. ¿En cuántos días pueden entregar el pedido si trabajan los mismos obreros pero aumentan la jornada laboral a 10 horas diarias?
12. En la terminal de un aeropuerto con 4 ventanillas abiertas facturan sus equipajes 18 personas en 3 minutos. Si cierran una de las ventanillas, ¿cuánto tardarán en facturar el equipaje las siguientes 81 personas?
13. Con 7,2 kg. de lana hemos obtenido 12 m de tela de 80 cm. de ancho. ¿Qué ancho tendrá otro rollo de la misma tela si hemos podido fabricar 20 m con 15 kg. de lana?
14. Los miembros de una expedición a la montaña saben que la última vez necesitaron 90 kg. de provisiones para alimentar a las 15 personas que iban durante los 12 días que duró la expedición. Si en su próximo viaje llevan la misma cantidad de provisiones pero son tres personas más, ¿cuántos días durará la comida?

REPARTOS PROPORCIONALES

15. Tres familias, de 6, 5 y 8 miembros cada una, quedan para comer. A la hora de pagar la factura, que asciende a 408, 5, ¿cómo deben repartirse el pago?
16. Tres parcelas encargan la obra de un sistema de regadío que deciden pagar proporcionalmente a la extensión de cada una. Si la obra ha costado 80190 € y la extensión de cada parcela es, respectivamente, de 15, 18 y 20 ha, ¿qué debe pagar cada uno?
17. Reparte 3540 de manera inversamente proporcional a 24 y 35

18. Un sector circular de área $26,18 \text{ cm}^2$ se divide a su vez en tres sectores circulares de amplitud 25° , 40° y 55° . Calcula el área de cada uno de los tres sectores así como del círculo completo

PORCENTAJES

19. Calcula cuánto hay que descontar a una prenda de 42 € cuyo precio se quiere rebajar un 15%

20. Calcula los siguientes porcentajes

a) 3% de 1250 b) 1,5 % de 684 c) 125 % de 21

21. Para viajar a una localidad situada a 630 km, debemos recorrer 510 km por autopista y el resto por carreteras secundarias. ¿Qué porcentaje del viaje transcurre por carreteras secundarias

22. En un equipo de fútbol con 24 jugadores de plantilla, se ha lesionado el 12,5%. ¿Cuántos están disponibles para el próximo partido

23. En un año en que la población de Alemania suponía el 18% del total de la Unión Europea, el país germano tenía unos 82 millones y medio de habitantes. ¿Cuántos había en toda la Unión Europea?

24. El precio final de unos zapatos durante las rebajas es de 36 €. ¿Cuál era el precio inicial si la rebaja ha sido del 25%?

25. Un operador ofrece un servicio de telefonía y televisión por 40 € mensuales +16% IVA. ¿Cuál es la cuota mensual que debemos pagar?

26. Una báscula defectuosa registra un 5% más del peso real. ¿Cuánto pesa realmente una persona si en la báscula marca un peso de 65 kg?

27. Al ver que era imposible venderlo, una familia ha rebajado el precio de su piso un 5% con lo que ahora lo vende por 171 000 €. ¿A qué precio lo vendía antes?

28. Completa la siguiente tabla de precios antes y después de añadirle un cierto porcentaje en concepto de impuesto

Precio sin impuesto	% de impuesto	Precio con impuesto
24 €		25,44 €
1500 €	33%	
	16%	37,7 €

29. En algunos países es obligatorio pagar un cierto porcentaje en concepto de propina cada vez que comes en un restaurante. ¿Cuál sería el precio real de una comida por la que hemos pagado 24,57 € si está establecido un 5% de propina?

30. Una comercial de un banco, después de que Hacienda le retenga un 16%, cobra 1344 € al mes. ¿Cuánto habría cobrado si sólo le hubieran retenido un 12%?

31. En un país tienen derecho a votar un 79% de la población empadronada. En una de las elecciones en las que ha habido una abstención del 27%, un 45% de los votantes se ha decantado por el partido vencedor. ¿Qué porcentaje de toda la población ha votado a ese partido?

32. La audiencia de una cadena de televisión ha sufrido las siguientes variaciones respecto al mes anterior.

Enero	Febrero	Marzo
+2,5%	-1,2%	+1,4%

Al final del trimestre, ¿cuál ha sido la variación respecto a la audiencia del trimestre anterior?

33. Halla con una sola operación

a) 2,3% de 540

b) 15 % de 0,24

c) 12 ‰ de 440

d) 8 ‰ de 3,6

34. José ha recogido 120000 kilos de trigo en la cosecha de este año. El año pasado fue año de sequía, por eso este año se ha recogido un 45% más que el anterior. a) ¿Cuánto trigo recogió el año pasado José?. b) Hace dos años, obtuvo 160000 kilos en la cosecha, ¿en qué porcentaje ha aumentado o disminuido la cosecha de este año respecto de la de hace dos? (2)

INTERÉS SIMPLE

35. Completa la siguiente tabla de datos de problemas de interés simple

Capital inicial	tiempo	tipo interés	Intereses
2.000 €	2	6	
	10	4	480 €
15.000 €		5	750 €
10.000 €	3		450 €

36. Calcula el capital acumulado tras cuatro meses si se han invertido 2400 € al 3,2 % de tipo de interés

El Rincón Multimedia

CALCULADORA

La forma de utilizar la tecla $\boxed{\%}$ de la calculadora es la siguiente. Para calcular el 17% de 72 tecleamos:

$$72 \boxed{\times} 17 \boxed{\%} \boxed{=} 12.24$$

Ahora bien, para realizar varios porcentajes seguidos es más cómodo utilizar el tanto por uno. Imagina por ejemplo que tienes que añadir a un cierto número de precios el 16% de IVA. En cada caso tendrás que hallar el 116% del precio. Para resolverlo de forma rápida con la calculadora científica teclea

$$1.16 \boxed{\times} \boxed{\times} \boxed{=} .$$

Verás que aparece una K en la parte superior de la pantalla. Significa que va a repetir esa operación hasta que pulses la tecla $\boxed{AC}$, de manera que cada vez que escribas una cifra y pulses $\boxed{=}$ la calculadora devolverá el 116% de esa cantidad.

Por cierto, las calculadoras no científicas aceptan expresiones del tipo $220 + 16\%$ que, aunque son frecuentes en la vida cotidiana, no son correctas desde el punto de vista matemático.

DERIVE

Vamos a usar Derive para, dada una fórmula cualquiera en la que intervienen varias variables, poder despejar aquella que nos pidan. Dada la fórmula del interés simple, $I = \frac{Crt}{100}$, supón que conocemos el interés, el capital y el tiempo y hemos de despejar el tipo de interés. Procederíamos como sigue:

- 1) En la **Entrada de Expresiones**, escribimos $I = \frac{Crt}{100}$. Ojo, que debes escribirla así

- 2) Pulsamos **Intro**. Vamos a **Resolver-Expresión** (o pulsamos el botón ) y aparece la ventana

#1: $i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100}$



Seleccionamos la variable a despejar, **r**. Pulsamos **Resolver**. Aparecerá la expresión $r = \frac{100 \cdot I}{ct}$

#1: $i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100}$

#2: $\text{SOLVE}\left(i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100}, c\right)$

#3:

$$c = \frac{100 \cdot i}{r \cdot t}$$

Se puede poner en práctica este sencillo procedimiento para despejar incógnitas de alguna de las fórmulas que aparecen en Física y Química de 3º sobre velocidad, tiempo, espacio...

Aplica lo que sabes

DE COMPRAS

Cuando te dispones a realizar cualquier tipo de compra, encuentras gran variedad de opciones para cada producto así como ofertas y promociones. Imagina que una tarde al recorrer diferentes establecimientos, te encuentras con estas situaciones:

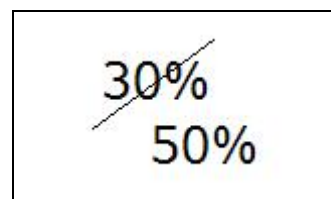


Compra 3 Paga 2	2 x 1	Segunda unidad a mitad de precio
--------------------	-------	----------------------------------

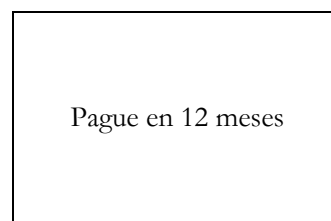
1. Llegas al supermercado con la intención de comprar café. Hay gran variedad de marcas con precios similares, pero hay tres marcas en oferta: en la primera si compras dos paquetes te regalan otro, en la segunda te venden dos por el precio de uno y en la tercera al comprar dos, el segundo paquete te lo cobran a mitad de precio. Ordena las tres ofertas de más a menos ventajosa.

2. También tienes la intención de comprar cereales. Hay dos marcas que tienen el tipo de cereales que buscabas. La primera caja vale 2,40 € y tiene 500 g mientras que la segunda vale 1,90 € pero tiene sólo 400 g. ¿Cuál de las dos opciones es más rentable? Algunos supermercados informan a cuánto sale el precio por kilogramo, pero si no fuera así y tuvieras que calcularlo para un gran número de productos, ¿cuál sería la forma más rápida de realizar esa operación con una calculadora?

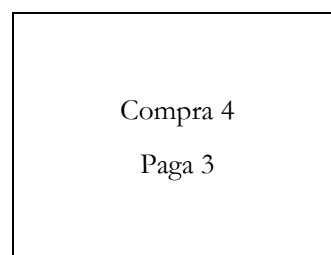
3. En una tienda de ropa encuentras un pantalón que te gusta. Se anuncian las “segundas rebajas” así que la prenda que antes tenía un 30% de descuento, ahora tiene un 50% sobre el precio original. ¿Qué nuevo descuento se le ha hecho al pantalón rebajado? ¿Un 20%? ¿O quizá algo más?



4. Te acercas a una tienda de electrodomésticos a ver un televisor. Sabes que tu familia está pensando en cambiarlo y ves uno que te gusta. Su precio es 550 € y si lo pagas en 12 meses, debes pagar un plazo mensual de 49,5 €. ¿Cuál ha sido el porcentaje de recargo por pagarlo a plazos?



5. En una tienda de discos se ofrece la siguiente promoción: “Si compras 4 discos, te regalamos el más barato”. Después de echar un vistazo a la tienda, hay cinco discos que te gustan. Sus precios son 24 €, 20 €, 18 €, 16 € y 10 €. Para aprovechar la oferta decides desechar uno de ellos. ¿Cuál debes rechazar para conseguir que el porcentaje de descuento que supone la promoción sea el mayor posible? ¿Cuál sería la opción con la que conseguirías el menor descuento?



Alrededor de las matemáticas

LA SUBIDA DE LOS PRECIOS

Seguramente en muchas ocasiones has oído hablar del “coste de la vida” o de la **inflación**. La inflación es un aumento continuado de los precios de los productos y servicios que consumen los habitantes de un país. Si ese aumento de precios no se ve acompañado de subidas similares en los salarios de los trabajadores, en los préstamos, etc... provoca que las familias pierdan parte de su **poder adquisitivo**, es decir, la capacidad de comprar bienes y servicios con los ingresos que reciben.



Así, aunque un trabajador reciba un año una subida de sueldo de un 2%, si los precios han subido una media de un 3%, pierde poder adquisitivo, es decir, ingresa más euros al mes pero puede adquirir ahora menos productos que con su antiguo sueldo.

Para medir la evolución de los precios se utiliza el **IPC** (Índice de Precios de Consumo) que estudia los precios de los bienes y servicios que consume la población residente en viviendas familiares en España. Establecer el IPC supone enfrentarse a varios interrogantes: ¿cuáles son esos bienes y servicios?, ¿cuál es la importancia de cada uno de ellos en el gasto familiar? Para ello, estudiando los hábitos de consumo de los españoles, se elabora una lista de cientos de artículos que se agrupan en distintos grupos (vivienda, vestido y calzado, alimentos, medicina, ocio y cultura...) a cada uno de los cuáles se le asigna un tanto por mil según su importancia en el consumo de las familias. Es lo que se llama la “**cesta de la compra**”.

¿Cómo se expresa el IPC? Si nos explican que una familia española media se gastó en un año 20500 € y al año siguiente 20900 €, estas cifras no nos dan una idea clara de cuál ha sido realmente la subida de los precios. Para resolver esta cuestión se asigna el valor 100 al gasto familiar medio de un año y se miden las variaciones porcentuales en los años posteriores respecto de ese año de referencia.

CUESTIONES

-Busca en el diccionario la definición de inflación.

-Tras lo explicado en el texto, intenta definir qué sería la “subida real de un sueldo”.

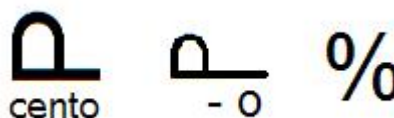
-Averigua cuál ha sido la subida del IPC del último año. Trata de recordar los precios del año pasado de artículos que compraste de forma habitual (una barra de pan, tu revista favorita, una entrada de cine...) Compara esos precios con los de este año. ¿Se ajustan a la subida del IPC o son superiores?

-Consulta en la página web del INE (Instituto Nacional de Estadística) cuáles son los grupos que se utilizan para elaborar el IPC y qué tanto por mil se le asigna a cada uno.

EL RETO

Tres amigos van de excursión al monte. Uno ha traído tres bocadillos y otro dos. El tercero no tuvo tiempo de preparar nada así que comparten todos los bocadillos a partes iguales. El que no ha traído comida tiene cinco euros para pagar a los otros dos. ¿Cómo sería justo que repartiera el dinero? ¿Será el problema tan fácil como parece?

SÍMBOLO DE PORCENTAJE



El símbolo del tanto por ciento evolucionó desde el siglo XV que se representaba “P cento” hasta el siglo XVIII con el símbolo que se utiliza en la actualidad

UNIDAD 4. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. Describe con una frase las siguientes expresiones algebraicas

a) $(-x)^3$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ c) $\frac{1}{x}$
d) $\sqrt{x-y}$ e) $b^3 - b^2$ f) $n + n+1$
g) $-\frac{\sqrt{a}}{2}$ h) $-x^2y$ i) $2n+2(n+1)$

2. Traduce al lenguaje algebraico

- a) La suma de dos números pares consecutivos
- b) La diferencia entre el opuesto de x y el doble de x
- c) La quinta parte del opuesto de un número
- d) El inverso del opuesto de un número
- e) La raíz cuadrada de a menos b

3. Escribe la expresión algebraica que corresponda a las siguientes frases:

- a) El precio de n botellas si cada una cuesta p euros
- b) El área de un triángulo de base b y altura h .
- c) El resultado de dividir x euros entre n personas

4. Escribe una expresión algebraica que defina las siguientes cantidades:

- a) El perímetro de un cuadrado de lado a
- b) El área de un triángulo de base a y altura b
- c) El área de un círculo de radio r
- d) El volumen de un cubo de arista x .

5. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores que se indican :

- a) $-(-x+8) + x$ para $x = -2$
- b) $-2x^2 + 2$ para $x = -1$

MONOMIOS

6. Señala cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios y determina su grado.

a) $\sqrt{2}x^2y^6$

b) $-s^{-2}t$

c) $\frac{x}{2}$

d) $x\sqrt{x}$

7. Halla los valores de m y n para que los monomios $-4x^m y^4$ y $\frac{3}{11}y^n$ sean semejantes

8. Realiza las siguientes operaciones

a) $-\frac{2}{7}x - \left(\frac{4}{5}x - x\right) =$

b) $-2a - 11b - 29a + 31a + 22b =$

c) $6x - (3y - x) + (x - 2y) =$

d) $-[6 - (-6t + 2) - 2t] =$

9. Realiza las siguientes operaciones con monomios

a) $2xy \cdot (-5y^2x) =$

b) $-\frac{1}{4}t \cdot \frac{\sqrt{2}t^2}{2} =$

c) $-\sqrt{2}a^3 \cdot \sqrt{8}a^5 \cdot \left(-\frac{1}{4}a^6\right) =$

d) $2 \cdot (a^2b^3x) : (-ab^2) =$

10. Escribe los términos que faltan

a) $-7ab^2 + 2ab^2 - \underline{\hspace{2cm}} = -4ab^2$

b) $-4yx^3 \cdot (-3x^3y^2) \cdot \underline{\hspace{2cm}} = -24x^7y^4$

c) $\underline{\hspace{2cm}} \cdot \left(-\frac{7}{4}t^2\right) = -\frac{2}{7}t^3u^2$

POLINOMIOS

11. Escribe el grado de los siguientes polinomios.

a) $ab^2 - a^2 - b^3$

b) $\frac{8}{5}x^2 - 6x^2y$

c) $12x^2yz^3$

d) $-6x^2 - 3x^2 + 2 - 7x - 3x^2$

12. Dados los polinomios $P(x) = 5x^4 - 4x^3 + x - 11$, $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ y $R(x) = -x^2 + 6x - 8$, realiza las siguientes operaciones (

a) $P(x) - Q(x)$

b) $P(x) + Q(x) - R(x)$

c) $P(x) \cdot R(x)$

d) $Q(x) \cdot R(x)$

13. Realiza las siguientes operaciones

a) $(-4t^3 - 4t^2 + 6t) : (t^2 - 2t)$

b) $\left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{6}{4}a\right) \cdot \left(a^2 - \frac{1}{4}a\right)$

14. Realiza las siguientes divisiones

a) $(6x^3 - 5x^2 + 6) : (2x - 1)$

b) $\left(\frac{8}{5}x^4 - 6x^2\right) : x^2$

c) $(6x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 2x - 4) : (3x^3 - 4)$

d) $(x^6 - 1) : (x - 1)$

15. Mediante la regla de Ruffini efectuar las siguientes divisiones:

a) $(x^4 - 2x^3 - 4x + 1) : (x + 4)$

b) $(2x^5 - x^4 - 6x + 9) : (x + 3)$

c) $(3a^4 - 2a^3 - a^2 - 3) : (a + 2)$

16. Comprueba que se cumple el Teorema del Resto en los apartados del ejercicio anterior

17. Calcula el resto que se produce al dividir el polinomio $2x^4 - 3x^3 + 5x - 2$ entre $x + 2$

18. Halla cuál tiene que ser el valor de k para que el polinomio kx^3+3x^2-6x+k sea divisible por $x-1$

19.. Halla el valor numérico de los siguientes polinomios para los valores que se indican

a) $-12ab^2 - a^2b$ para $a=-2$ y $b=4$

b) $-11x^3 - 10x^2 - 8x$ para $x=3$

FORMAS DE TRANSFORMAR UN POLINOMIO

20. Saca factor común todo lo que puedas

a) $2x^3 - 6x^2 + 8x =$

b) $3a^2b - 6a + 20a^2 =$

21. Escribe de otra forma:

a) $(6a - 2b)^2 =$

b) $(3t - 2s) \cdot (3t + 2s) =$

c) $16y^2 - 9x^2 =$

d) $6 - t^2 =$

22 .Escribe en forma de binomio al cuadrado

a) $1 - 6x + 9x^2$

b) $\frac{1}{16}x^2 + 64 - 4x$

c) $4a^2 + x^2 - 4ax$

23 .Transforma estos binomios en productos

a) $49x^2 - 121y^2$

b) $\frac{x^2}{16} - y^2$

c) $a^4 - 4b^4$

d) $3y^2 - 2z^2$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

24 . Simplifica

a) $\frac{1-a^2}{5+5a}$

b) $\frac{3x^3-3x}{x^2-2x+1}$

25. Comprueba si las siguientes fracciones son equivalentes:

a) $\frac{2t-2}{4z}$ y $\frac{3(t-1)}{6z}$

b) $\frac{4-x^2}{3+x^2}$ y $\frac{(2-x)^2}{(x+3)^2}$

26. Reduce a común denominador

a) $\frac{2x}{x-3}$, $\frac{3}{9-x^2}$ y $\frac{1}{3+x}$

b) $\frac{z}{z^2-16}$ y $\frac{4}{z^2-8z+16}$

27. Opera y simplifica todo lo posible

a) $\frac{3x-6}{3x-3} \cdot \frac{x^2-1}{(x-2)^2} =$

b) $\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{x+1}{x-1} =$

c) $\frac{9-x^2}{y} : \frac{3+x}{y^2} =$

d) $\frac{a^2-4}{a+2} - \frac{5}{a-2} =$

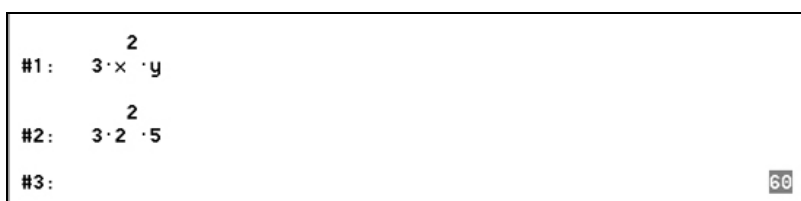
El Rincón Multimedia

VALOR NUMÉRICO CON DERIVE

En la **Entrada de Expresiones**, escribimos, por ejemplo, el polinomio $3x^2y$. Pulsamos **Intro**. Pulsamos **Simplificar-Sustituir variable** (o el botón ). Aparecerá esta ventana



Pinchamos en **x** e introducimos un valor (por ejemplo, $x = 2$). Sin salir de la ventana, pinchamos en **y** e introducimos otro valor (p.e. $y = 5$). Si pulsamos **Sí**, en la línea #2 aparecerá $3 \cdot 2^2 \cdot 5$. Si damos directamente a **Simplificar**, aparecerá el resultado de la operación (#3)



FACTORIZAR POLINOMIOS CON DERIVE

Se pretende, dado un polinomio, obtener su descomposición en factores –si es posible-. De esta manera, podremos saber cuáles son sus raíces y operar de manera más cómoda con dicho polinomio.

Escribimos en la **Entrada de Expresiones** el polinomio $x^2 + x - 2$. Pulsamos **Intro**. Seleccionamos **Simplificar-Factorizar** y aparece la ventana de la derecha. Damos a **Factorizar** Aparecerá $(x-1) \cdot (x+2)$, en la línea #2.



Si introducimos el polinomio $x^2 - 2$, en la línea #3 y repetimos el proceso, no obtendremos el polinomio factorizado (#4). ¿Qué ha ocurrido?



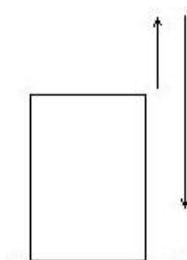
Hemos de seleccionar, en la ventana de arriba, la opción “**Radicales**”, pues en este caso las raíces del polinomio no son números racionales, que es la opción que aparece por defecto. Así, tendremos el resultado en la línea #5.

Aplica lo que sabes

EN CAÍDA LIBRE

Imagina que desde la altura de un edificio de 30 metros, lanzas hacia arriba un objeto con una velocidad de 25 metros por segundo. A partir de ese momento, la altura que alcance el objeto después de t segundos vendrá dada por la expresión:

$$A(t) = -5t^2 + 25t + 30$$



Esta expresión obedece a la fórmula del movimiento donde la aceleración es constante. En este caso 5 es la mitad de la aceleración de la gravedad, que aparece con signo negativo ya que, al atraer al objeto hacia el suelo, contribuye a frenarlo cuando está subiendo y a que caiga con cada vez más velocidad después. La velocidad aparece con signo positivo ya que, al lanzarlo hacia arriba, contribuye a que el objeto alcance más altura.

Responde ahora a las siguientes cuestiones

a) Halla $A(0)$, es decir, el valor numérico de la expresión cuando $t=0$. ¿Es lógico ese resultado?

b) Completa la tabla de la derecha hallando el valor numérico para los valores que se piden

t (tiempo)	$A(t)$ (altura)
0	30
1	
2	
3	
4	
5	

c) ¿Qué observas en la secuencia de valores de altura que has obtenido? ¿Qué ha ocurrido con el objeto durante los cinco primeros segundos?

d) Teniendo en cuenta la secuencia de resultados, ¿qué altura máxima crees que habrá alcanzado el objeto y qué tiempo habrá transcurrido desde que lo lanzamos?

e) Si quisiéramos analizar el momento en el que el objeto llega al suelo, sería el instante en el que la altura, $A(t)$, es igual a 0. Trata de hallar para qué valor de t ocurre eso.

f) Teniendo en cuenta el valor de $A(7)$, ¿desde qué altura habría que lanzar el objeto hacia arriba con la misma velocidad pero de manera que tarde 7 segundos en llegar al suelo?

g) Si en lugar de lanzar el objeto hacia arriba lo lanzáramos hacia abajo con la misma velocidad, ¿qué modificación habría que hacer a la fórmula de la altura?

Alrededor de las matemáticas

EL POLINOMIO DE GOOGLE

Ya sabes que, dada la inmensa cantidad de información que se encuentra en Internet, es habitual usar un buscador que nos permite localizar el tipo de documento que queremos encontrar a partir de una o varias palabras clave

Uno de los buscadores más populares es Google. Sus creadores fueron **Larry Page** y **Sergey Brin**, dos estudiantes de universidad que trataban de crear una especie de biblioteca digital de los documentos que aparecen en la Red. Para ello idearon un sistema para decidir la importancia de cada documento.



Ese sistema se basa en la idea de que la importancia de un documento depende de la cantidad de documentos que tienen un enlace hacia él, si bien el buscador tiene en cuenta que los enlaces tienen más valor si provienen de páginas de calidad. Y, lógicamente, esa es la mayor dificultad, decidir cuál es el interés o calidad de una página. Google lo ha conseguido ponderando diversos factores según su relevancia y lo ha expresado mediante un polinomio cuyos coeficientes permanecen secretos.

Por cierto que sus creadores se decidieron por el nombre de Google por su parecido a googol (la unidad seguida de 100 ceros), uno de los mayores números que se pueden concebir.

CUESTIONES

1. Cita el nombre de otros buscadores que conoces o has utilizado.
2. Investiga cómo se llama el sistema de clasificación de páginas de Google
3. Si un googol te parece enorme, averigua qué es un googolplex
4. Realiza algunas búsquedas con Google u otro buscador que señale cuántas páginas encuentra en cada búsqueda y cuánto tarda. Analiza las cifras, ¿si encuentra más páginas relacionadas con tu búsqueda, el tiempo es mayor o menor?

EL RETO

Vamos a demostrar que $2=1$. Sean dos números iguales, x e y . Como $x=y$, multiplicando por x ambos miembros

$$x^2 = xy$$

Restando y^2 de ambos miembros

$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$

que podemos transformar en

$$(x+y)(x-y) = y(x-y)$$

Dividiendo entre $(x-y)$

$$x+y = y$$

Pero como $x=y$

$$2y=y$$

Finalmente, dividiendo entre y

$$2=1$$

El origen de los polinomios parece que se remonta al S.XI, cuando el poeta y matemático **Omar Al-Khayyam** extendió el álgebra del simple cálculo de ecuaciones al de los polinomios, introduciendo las distintas operaciones con polinomios.

Los signos de operación que hoy en día utilizamos tienen orígenes muy antiguos. Aquí te mencionamos los de algunos de ellos:

+	Lo introdujo Nicolás de Oresme en el S.XIV y sustituyó a “et” (“y” en latín)
x	Lo usó por vez primera William Oughtred en 1631
:	Los dos puntos fueron utilizados por Johnson en 1633
·	W.Leibniz (1646-1716) pensaba que el aspa de la multiplicación se confundía con la x por lo que la sustituyó por el punto

UNIDAD 5. ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1. Comprueba si $x=1$ y $x=2$ son soluciones de la ecuación $3x + \frac{1}{2}(x-1) = 3$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3(x-4) - 5(2x-3) + 5 = 2(3x+4)$

b) $6(2-x) + 5(2x-3) = 2 + 3(x-5)$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 6 = 2x - 5$

b) $2 + 5x = 4 + x$

c) $3(x+2) - 2(x-1) = 3 - 2(x-5)$

d) $8(x-1) + 2(x+3) = 1 - 2(x-1)$

4. Resuelve $\frac{1}{5 - \frac{x}{3}} = 7$

5. Resuelve las ecuaciones :

a) $5(2x+1) - 3(x+1) = 5$

b) $2(x-1) - 2(x+3) = -5(x+1)$

6. Resuelve las ecuaciones:

a) $4 - \frac{2x-4}{2} = \frac{2(x+1)}{-3}$

b) $\frac{2(x+2)}{3} + \frac{3(x-1)}{2} = 2$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-2}{3} - \frac{2x+2}{9} = 1 + \frac{x}{3}$

b) $\frac{3x-1}{2} + \frac{2-x}{3} = \frac{1-x}{6}$

c) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+3}{2} = -\frac{2(x-2)}{3} + \frac{25}{9}$

d) $5(x+3) + \frac{x}{2} = 3x-1 - (x+2)$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $4x^2 + 4x - 3 = 0$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

c) $x^2 - 9x + 14 = 0$

d) $x^2 - 8x + 16 = 0$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $3x^2 - 9x = 0$

c) $4x^2 - 4 = 0$

d) $x^2 - 16 = 0$

10. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^2 + 6x + 5 = 0$

b) $4x^2 - 1 = 0$

11. Indica el número de soluciones que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado sin resolverlas:

a) $2x^2 - 4x + 1 = 0$

b) $x^2 - 3x + 12 = 0$

c) $x^2 - 8x + 16 = 0$

d) $x^2 - 5x + 1 = 0$

12. Calcula el valor de a para que la ecuación $x^2 - 8x + a = 0$ tenga dos soluciones iguales.

13. Indica cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones de segundo grado son completas:

a) $3x^2 + 2x = 0$

b) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

c) $x^2 - x + 2 = 0$

d) $3x^2 + 2 = 0$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $3x^2 - 9x = 0$

c) $2x^2 - 4 = 0$

d) $x^2 - 16 = 0$

15. Escribe tres ecuaciones de segundo grado incompletas.

16. Resuelve las ecuaciones siguientes utilizando el método más adecuado en cada caso:

a) $3x^2 - 5x = 0$

b) $4x^2 - 1 = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $5x^2 - 3x = 0$

17. ¿Cuánto vale el producto de las soluciones de la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$? ¿Y la suma?
18. Sabiendo que el producto de las dos soluciones de una ecuación es 8 y la suma 6, escribe la ecuación de segundo grado.
19. Si el producto de las dos soluciones de una ecuación de segundo grado es 21 y una de ellas es 7, calcula la otra.
20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x + 4)(x + 3) = 0$

b) $2(x + 2)(x - 3) = 0$

c) $5(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$

21. Resuelve las ecuaciones:

a) $(x + 1)(x - 5) = -9$

b) $(2x + 1)(4x + 2) = 8$

c) $(x + 1)(x + 3) = 3$

ECUACIONES RADICALES

22. Resuelve la ecuación $\sqrt{2x + 4} = x + 2$

23. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales:

a) $\sqrt{x} + 3 = 4$

b) $\frac{10}{\sqrt{6 - x}} = 5$

24. Comprueba si $x = 3$ y $x = 7$ son soluciones de la ecuación $1 + \sqrt{4x - 3} = x + 1$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

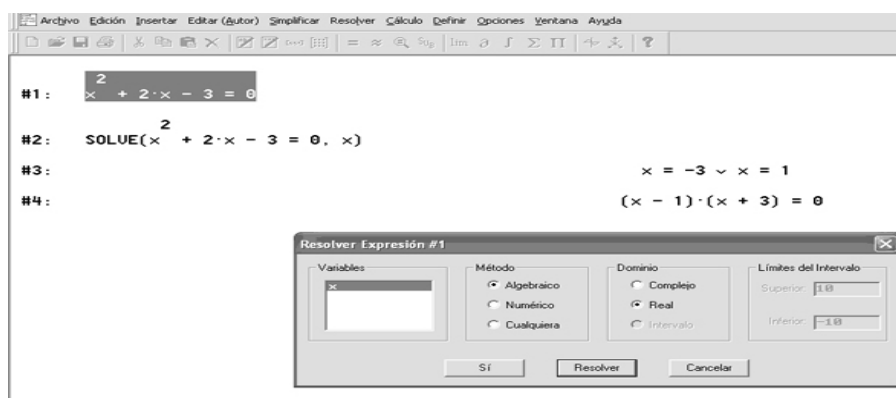
25. Daniel tiene 3 años más que su hermana María. Si entre los dos tienen 17 años.
¿Qué edad tiene cada uno?
26. Cuando los 720 alumnos de un instituto votaron a los dos candidatos para representante en el Consejo Escolar, el ganador ganó con una ventaja de 160 votos. ¿Cuántos votos obtuvo?
27. Halla dos números naturales consecutivos tal que la diferencia entre sus inversos sea $\frac{1}{30}$
28. Tenemos una baraja de 40 cartas. Hacemos tres montones. Si el segundo montón tiene $\frac{1}{4}$ de las cartas que contiene el primero y el tercer montón el triple de cartas que el segundo ¿Cuántas cartas tiene cada montón?
29. La suma de las edades de un padre y un hijo es 54. Si el padre es 32 años mayor que el hijo, ¿qué edad tiene cada uno?
30. Calcula entre qué número natural hay que dividir 20 si el cociente es el doble que el divisor y el resto es 2.
31. Un polígono regular tiene 135 diagonales. ¿Cuántos lados tiene?

El Rincón Multimedia

ECUACIONES CON DERIVE

Veamos con un ejemplo cómo resolver ecuaciones de cualquier grado.

- Escribimos la ecuación $x^2 + 2 \cdot x - 3 = 0$ en la **Entrada de Expresiones**. Pulsamos **Intro**.
- Seleccionamos **Resolver-Expresión** o pulsamos .
- En la ventana que aparece marcamos, dentro de **Dominio**, el valor “**Real**”, porque la solución buscada queremos que sea un número de este conjunto. Pulsamos **Resolver**.
- Aparecerán las líneas #2 y #3.
- (El símbolo lógico que aparece en #3 “ $\vee$ ” significa “o”)
- Seleccionando de nuevo la línea #1 y factorizando (**Simplificar-Factorizar**), obtendremos la línea #4, con los factores asociados a cada una de las soluciones –o raíces- de la ecuación.



Prueba a resolver la ecuación $x^2 + 2x + 3 = 0$. ¿Qué observas? ¿Qué significará el “*false*” que aparece? Si intentas factorizar, ¿qué crees que ocurrirá?

ECUACIONES CON EXCEL

La Hoja de Cálculo nos puede ayudar a obtener de una forma rápida las soluciones de una ecuación de segundo grado.

Veamos cómo se procedería para resolver $ax^2 + bx + c = 0$ suponiendo que conocemos a, b y c

1. Escribimos en la celda B1 el valor de a, en B2 el valor de b y en B3 el de c.
2. Para obtener el valor de x_1 , en D1 escribiremos la fórmula: $=(-B2 - \text{raiz}(B2^2 - 4*B1*B3))/2*B1$
3. Para obtener el valor de x_2 , en D2 escribiremos la fórmula: $=(-B2 + \text{raiz}(B2^2 - 4*B1*B3))/2*B1$

	A	B	C	D
1	a=	1	$x_1 =$	2
2	b=	-5	$x_2 =$	3
3	c=	6		
4				

	A	B	C	D
1	a=	1	$x_1 =$	#NUM!
2	b=	1	$x_2 =$	#NUM!
3	c=	1		
4				
5				

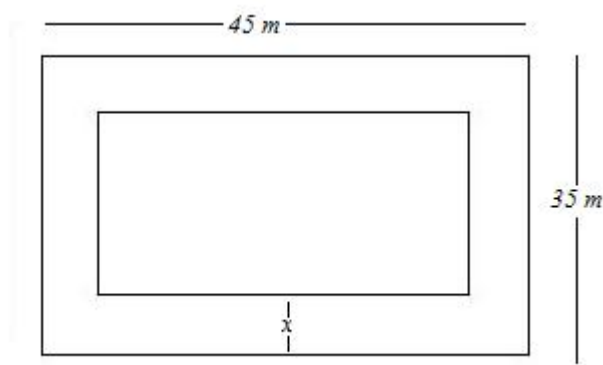
Si no hay solución el resultado será:

Aplica lo que sabes

CALCULANDO EN EL TERRENO

Tu familia se ha comprado un terreno en el campo. Tiene forma rectangular, 1200 m^2 de superficie y su perímetro es de 140 metros.

1. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?
2. Para cercar el terreno con una red metálica, te recomiendan poner un poste cada 5 metros. ¿Cuántos postes será necesario colocar?
3. En una parte del terreno habéis decidido hacer una piscina cuadrada de 2 m de profundidad. ¿Cuál debe ser la longitud del lado para que la piscina tenga una capacidad de 242 m^3 ?
4. Para llenar la piscina disponéis de dos surtidores de agua. Abriendo los dos llenáis la piscina en un par de horas, mientras que si utilizáis sólo uno hay que tener cuidado porque con uno se tarda el doble que con el otro. ¿Cuánto tarda cada surtidor en llenar la piscina por separado?
5. La parcela de al lado es más pequeña, aunque su dueño dice que no es para tanto. “Mi parcela es cuadrada – dice- y, si le añadiera 23 metros más de largo tendría la misma superficie que la vuestra”. ¿Cuánto mide su parcela?
6. Otra de las parcelas cercanas es de un ganadero que guarda ahí sus vacas. Para evitar que se escapen ha puesto alrededor de la primera valla otra a una cierta distancia. Si la parcela original mide $35 \text{ m} \times 45 \text{ m}$ pero sólo quedan 1344 m^2 dentro de la valla interior, ¿Cuál es la distancia de separación entre las dos vallas?



Alrededor de las matemáticas

INDICE DE MASA CORPORAL

El Índice de Masa Corporal (IMC) es un índice que, a partir del peso y la altura de una persona, refleja si su peso es el adecuado o, por el contrario, está por encima o por debajo de lo recomendable.

Para calcularlo utilizamos la ecuación $IMC = \frac{P}{T^2}$ donde P es el peso actual en kilogramos y T es la talla actual en metros. Según el resultado que obtengamos su interpretación es:

- Entre 18 y 25 se considera que la persona tiene un peso saludable.
- Un valor entre 25 y 30 ya se interpreta como “sobrepeso” y supone un aumento de riesgo para la salud.
- Entre 30 y 35 se considera "obesidad leve" y entre 35 y 40 se considera “moderada”.
- Por encima de 40 se considera "obesidad mórbida" y puede requerir una intervención quirúrgica.
- Por otro lado, un valor de IMC por debajo de los 18 kg/m² indica malnutrición o algún problema de salud.

El índice IMC se calcula desde 1980 pero no es el único índice de este tipo. Otro indicador semejante es El índice cintura/ cadera (ICC). Hallamos el cociente entre el perímetro de la cintura (medido a la altura de la última costilla flotante) y el perímetro máximo de la cadera a la altura de los glúteos y lo multiplicamos por 100. Se consideran normales valores de ICC entre 71 y 84 para las mujeres y entre 78 y 93 para los hombres.

1. Calcula tu valor del IMC utilizando tu peso y talla. ¿Cómo se considera tu resultado?
2. En Internet se pueden encontrar páginas que calculan de forma automática tu IMC. Trata de localizar alguna de ellas y compara el resultado que has obtenido con el que te ofrece la página.
3. Lógicamente estos valores son aproximados y pueden tener inconvenientes. ¿Qué ocurriría por ejemplo con el IMC de una persona muy musculada?
4. Escribe algunos hábitos de alimentación que te ayuden a conseguir un peso saludable.

EL RETO

En una clase en la que había el doble de alumnos que de alumnas se repartieron en diciembre felicitaciones de Navidad. Cada alumna repartió felicitaciones entre el resto de las alumnas, entre todos los alumnos y además le dio una a la profesora. Igual hizo cada uno de los chicos, repartiendo a los demás chicos y a todas las chicas sin olvidar entregar una a la profesora. Esta elaboró un gran cartel navideño que colgó en el aula aunque no entregó ninguna felicitación. Si en total se repartieron 576 felicitaciones, ¿cuántos alumnos había en total en la clase?

LA TUMBA DE DIOFANTO

En el sepulcro de Diofanto de Alejandría aparece este problema que nos permite conocer la edad a la que murió:

"Caminante, aquí se sepultaron los restos de Diofanto: los números pueden mostrar el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, de pelo se cubrió su barba. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivir cuatro años a la muerte de su hijo. De todo esto se deduce su edad."

Si x es la edad que vivió Diofanto, obtenemos la ecuación $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$, cuya solución es x=84 años

UNIDAD 6. SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. RESOLUCIÓN.

1. Indica si los siguientes sistemas son lineales o no:

$$a) \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x^2 + y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

2. Comprueba si $x = 2, y = 2$ es solución de los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

3. Indica si los siguientes sistemas son equivalentes:

$$a) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 7 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

4. Resuelve, utilizando el método de sustitución, el siguiente sistema

$$\begin{cases} -x + 3y = -2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

5. Resuelve, utilizando el método de igualación los sistemas:

$$a) \begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 5y = -2 \\ -2x - 10y = 4 \end{cases}$$

6. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$$

7. Indica el número de soluciones de los sistemas:

$$a) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - \frac{2}{3}y = -6 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$$

8. Clasifica los sistemas anteriores según el número de soluciones.

9. Resuelve gráficamente el sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$$

10. ¿Tiene el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases}$ solución única? Resuélvelo gráficamente.

11. Resuelve por sustitución los sistemas:

$$a) \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = 1 \\ \frac{x+2}{5} + \frac{y-4}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{3x-2}{2} - \frac{y+5}{3} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

12. Resuelve utilizando el método de igualación los sistemas:

a)
$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ -2x + 2y = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 5x - 4y = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

13. Resuelve utilizando el método de reducción los sistemas:

a)
$$\begin{cases} x - 5y = -2 \\ -2x + y = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 5y = -5 \\ 6x + 3y = 3 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS CUADRÁTICOS.

14. Indica cuáles de los siguientes sistemas son cuadráticos y resuelve aquellos que lo sean:

a)
$$\begin{cases} xy^2 = 5 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + 4y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} xy = 5 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

15. Resuelve los siguientes sistemas cuadráticos:

a)
$$\begin{cases} xy = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

16. Resuelve los siguientes sistemas cuadráticos:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x^2 + y = 5 \\ x + 3y = -7 \end{array} \right\} \end{array}$$

17. Resuelve los sistemas utilizando reducción

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x^2 - y^2 = -2 \\ x^2 - y^2 = -5 \end{array} \right\} \end{array}$$

PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. LENGUAJE ALGEBRAICO.

18. La suma de dos números es 10. Uno de ellos excede en uno al doble del otro. Calcula los dos números.

19. Tenemos 2,10 € para comprar caramelos y chicles. Cada caramelo cuesta 6 céntimos de euro y cada chicle 0,10 €. Calcula cuántos chicles y cuántos caramelos compraremos sabiendo que queremos que haya 3 chicles menos que caramelos.

20. Tengo 54 € para comprar bolsas de patatas y de cebollas para mi tienda. Cada bolsa de patatas cuesta 2 € y cada bolsa de cebollas 5 €. Sabiendo que tengo que comprar 6 bolsas más de patatas que de cebollas. ¿Cuántas compro de cada una?

21. La suma de dos números es 8 y su diferencia es la semisuma de los dos. Calcúlalos.

22. Un triángulo isósceles tiene de perímetro 20 cm. Calcula la longitud de sus lados sabiendo que el lado desigual mide la mitad que cada uno de los otros dos.

23. En una clase hay 28 alumnos. El número de chicos excede en 8 al número de chicas. ¿Cuántos alumnos de cada sexo hay?

24. Los equipos A y B juegan un partido de fútbol. El número de goles que mete A supera en 2 al de B. Si entre los dos equipos han metido 8 goles. ¿Cuántos ha metido cada equipo?

25. En un cine hay 32 personas. El número de mujeres sobrepasa en 2 al doble del número de hombres. ¿Cuántos hombre y cuántas mujeres hay?

26. Divide el número 21 en dos partes de tal forma que al dividir una entre otra se obtenga como cociente 3 y como resto 1.

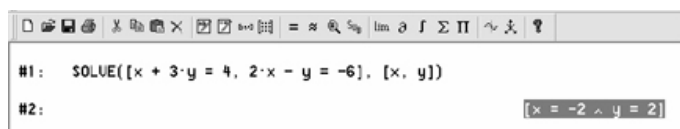
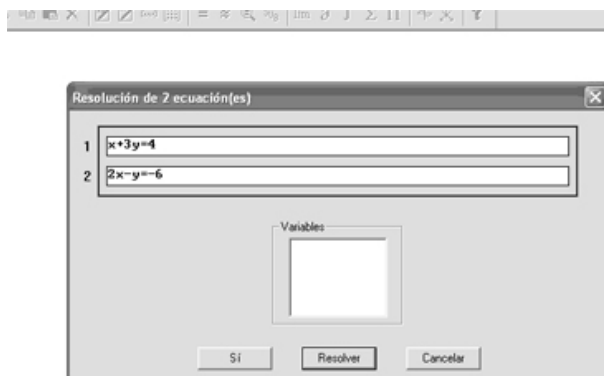
27. En una tienda tienen 35 pulseras de dos tamaños diferentes. Las pulseras más pequeñas valen 32 € cada una y las más grandes, 50 €. ¿ Cuántas pulseras deben vender de cada tamaño para recaudar 1300 € ?

El Rincón Multimedia

SISTEMAS DE ECUACIONES CON DERIVE

Consideramos el sistema
$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$$

- Seleccionamos **Resolver-Sistema**.
- En número de ecuaciones, escribimos “2”.
- En cada una de las líneas de la nueva ventana aparecida, introducimos las correspondientes ecuaciones. Pulsamos **Resolver**.
- Aparecerá la pantalla que hay bajo estas líneas:



El símbolo lógico que aparece en #2 “^” significa “y”. Es decir, la solución es la formada por los valores $x=-2$ e $y=2$

Plantea sistemas que no tengan solución, como
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$
. ¿Qué crees que ocurrirá al pulsar “Resolver”?

MÉTODO DE REDUCCIÓN CON EXCEL

	A	B	C	D	E	F	G
1	A	X	+	B	Y	=	C
2	A'	X	+	B'	Y	=	C'
3							
4							
5	A=	3		A=	2		
6	B=	2		B=	3		
7	C=	4		C=	1		
8							
9							
10	6	X	+	4	Y	=	8
11	6	X	+	9	Y	=	3
12							
13				-5	Y	=	5
14							
15					Y	=	-1
16							
17					X	=	2
18							
19							

Escribimos el sistema de ecuaciones expresado en forma general tal y como aparece en el gráfico al margen.

Vamos a resolver el sistema, reduciendo la incógnita X.

En el rango B5:B7 introducimos el valor de los coeficientes y término independiente de la primera ecuación. Análogamente en E5:E7, los de la segunda ecuación del sistema. En A10, D10 y G10 está el resultado de multiplicar los coeficientes de la primera ecuación por el de la X de la segunda (A', en la celda E5). Es decir,

$$A_{10} = B_5 \cdot E_5; D_{10} = B_6 \cdot E_5 \text{ y } G_{10} = B_7 \cdot E_5$$

Para conseguir el mismo coeficiente de X en la segunda ecuación, multiplicamos todos los coeficientes de ésta por el valor de A (que está en B5). En D13 restamos los coeficientes de las Y y en G13, los términos independientes. Por último, en G15 despejamos la variable $Y = G_{13}/D_{13}$ y, con este valor, despejamos X en cualquier ecuación.

Observación: Se puede añadir una condición en la celda G15, de tal forma que realice ese cálculo de Y, siempre que no quede el valor 0 en su coeficiente (en D13), pues no puede haber un denominador nulo. ¿Cómo quedaría?

Aplica lo que sabes

TESTS DE OPOSICIÓN

Algunos de los exámenes de las oposiciones para ser funcionario son de tipo test. En cada pregunta se plantean diversas respuestas alternativas para que el opositor elija una de ellas. Para evitar que la persona que se examina tenga posibilidades de aprobar contestando al azar, se penalizan las respuestas incorrectas restando puntos.



En un determinado examen con 40 preguntas y cuatro posibles respuestas por cada pregunta, se obtiene un punto por cada respuesta correcta, cada error provoca la pérdida de 0,25 puntos mientras que, si no se señala ninguna respuesta ni se suman ni se restan puntos.

1. ¿Qué puntuación obtendrá una persona que ha contestado a 32 de las preguntas si ha cometido 9 errores?
2. Una persona que contestó a todas las preguntas, ha obtenido 18,75 puntos. ¿Cuántos errores cometió?
3. Otra persona, después de comprobar las respuestas con los apuntes, estaba segura de haber contestado 22 bien, pero no recordaba cuántas había dejado en blanco. Si obtuvo 20 puntos de nota, ¿cuántas dejó sin contestar?
4. Si alguien contesta todas las preguntas, ¿cuál es el número mínimo de fallos que debe cometer para obtener una puntuación negativa?
5. En principio se resta 0,25 por cada error porque, con cuatro posibles respuestas, hay un 25% de posibilidades de acertar la correcta al azar.
 - a) ¿Es correcto ese planteamiento?
 - b) Una persona que respondiera totalmente al azar, ¿cuántas respuestas correctas podríamos esperar que consiguiera? ¿Qué puntuación obtendría en ese caso?
 - c) ¿Es mejor contestar al azar que dejarlo en blanco?
6. ¿Cuánto habría que restar por cada error para que no compensara contestar al azar?

Alrededor de las matemáticas

MEZCLAS

Hoy en día hay que fijarse muy bien en muchos de los productos que aparecen en el mercado, ya que, prácticamente bajo un mismo nombre, conviven variedades de muy diferente calidad o pureza.

Un ejemplo claro es el café. Normalmente se venden dos tipos: el *natural*, más puro pero que tiene una apariencia más clara, y el *torrefacto*, que se tuesta con azúcar obteniendo un color más oscuro y un sabor más fuerte. Es muy común que se vendan mezclados pero la proporción no es siempre de un 50% de cada tipo de café.

Algo similar ocurre con el aceite. Existe una amplia gama de aceites que van desde el oliva virgen extra, que es puro zumo de aceituna, hasta el aceite de orujo, que se obtiene a partir de un residuo de la propia aceituna. Ahora bien, las variedades de menos calidad suelen enriquecerse con un cierto porcentaje de aceite virgen para mejorar su sabor u olor.

Más establecida está, por ejemplo, la calidad del oro, que se mide en quilates. Un quilate de oro supone $\frac{1}{24}$ de la masa total de la aleación de la que forma parte. Así, una joya de 18 quilates tiene $\frac{18}{24}$ partes de oro (es decir una pureza del 75%) mientras que el oro de 24 quilates es de oro puro. Ahora bien, el oro puro es demasiado dúctil y blando por lo que suele mezclarse con otros metales.

1. Comprueba, si tienes algún paquete en casa de café mezcla de natural y torrefacto, si indica cuál es el porcentaje de café de cada tipo que se ha utilizado.
2. ¿Cuántos quilates tendría una joya de oro de un 25% de pureza?
3. Busca el significado de “aleación” y “dúctil”
4. ¿Qué otros productos se te ocurren que se vendan con algún tipo de mezcla o distintos grados de pureza?

EL RETO

En una tienda de anticuario encuentras una antigua botella. Vale 11 € con el tapón incluido. Si la botella vale 10 € más que el tapón, ¿cuánto vale la botella?



Al principio la utilizas para servir el agua y compruebas que, llena de agua, pesa 300g. Días después, la llenas de aceite con lo que la botella llena pesa ahora 284 gramos. Si la densidad del aceite es el 80% que la del agua, ¿cuánto pesa la botella?

LA PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal es una disciplina matemática relativamente reciente (de principios del S.XX) que trata de encontrar la solución óptima a un problema (que puede ser desde regular el tráfico de aviones de un aeropuerto hasta maximizar el beneficio de una empresa). En los casos más sencillos se utilizan ecuaciones con dos incógnitas aunque en casos más complicados se pueden utilizar muchas más.

ORIGEN DE LOS SISTEMAS

Los sistemas de ecuaciones lineales ya se utilizaban en la época de los babilonios (de hecho daban poca importancia a las ecuaciones con una incógnita por considerarlas muy elementales). Eso sí, en ocasiones llamaban a las incógnitas con palabras como “anchura”, “longitud” o “manos”.

UNIDAD 7. SUCESIONES

SUCESIONES

- Averigua el término general de las sucesiones:
 - El conjunto de los inversos de los números naturales.
 - El conjunto de los opuestos de los números naturales.
 - $(a_n) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots)$
 - $(b_n) = (3, 5, 7, 9, \dots)$
- Escribe los 5 primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:
 - $a_n = 9 - 4n$
 - $b_n = n^3 - 3n$
 - $c_n = 3^{n-1}$
 - $d_n = \frac{3n-2}{n^2}$
- Comprueba si los números $-2, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}$ y $\frac{7}{3}$ pertenecen a las siguientes sucesiones:
 - $a_n = \frac{3+2n^2}{4n}$
 - $b_n = \frac{2n+1}{n}$
 - $c_n = \frac{-n+3}{-n}$
 - $d_n = -2n+2$
- Calcula el término general de la sucesión $(a_n) = (-1, 2, -3, 4, -5, \dots)$

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

- Calcula el término general de una progresión aritmética sabiendo que el tercer término es 9 y que $a_7 = 17$

6. Los números 10 y 38 son términos de una progresión aritmética. Si hay otros tres términos entre ellos, ¿cuál es la diferencia de la progresión?
7. Calcula S_8 en una progresión aritmética sabiendo que $a_4 = -9$ y $a_{12} = -41$.
8. Halla la diferencia de una progresión aritmética si la suma de los 10 primeros términos es 39 y la de los 10 siguientes 59.
9. Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 7 y la diferencia 3, ¿qué posición ocupa el término de la progresión cuyo valor es 187?
10. Los doce primeros términos de una progresión aritmética suman -60 y la diferencia de los extremos es -22 . Halla los términos de la progresión.
11. En un avión la primera fila de asientos dista de la cabina del piloto metro y medio y la cuarta fila se encuentra a 3,75 metros de la cabina. ¿A qué distancia de la cabina se encuentra una persona que está sentada en la fila décima? ¿En qué fila está una persona que está a 7,5 metros de distancia de la cabina?
12. Una compañía de telefonía móvil ofrece a los clientes una oferta de llamadas a móviles de la misma compañía durante las 24 horas. El precio de una llamada de 22 minutos es 1,3 €, sabiendo que por cada minuto hablado se cobran 5 céntimos, y que el primer minuto se incluye en la tarifa de conexión, ¿cuánto cuesta la conexión de llamada con esta oferta?
13. Una tienda de informática permite pagar un equipo en 12 cuotas mensuales sin recargo después de abonar una cantidad de entrada. Si después de cuatro meses, hemos pagado un total de 640 €, y el coste total del equipo es de 1520 €. ¿Cuál es el importe de cada cuota y qué cantidad hemos pagado de entrada?
14. Calcula la suma de los 50 primeros números impares
15. Sabiendo que en una progresión aritmética de diferencia -1 $S_{20} = -70$, averigua el término general de la progresión.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

16. Comprueba cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas
 - a) 2, 4, 16, 256...
 - b) -3, 9, -27, 81...
 - c) $\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{8}{45}, \dots$
 - d) 0'3, 0'33, 0'333...

17. Escribe los primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:
a) $a_1 = -1$ y $r = 102$
b) $a_1 = 0'02$ y $r = 5$
18. Halla el primer término de una sucesión si $r=2$ y la suma de sus cinco primeros términos es $15'5$.
19. Señala si las siguientes sucesiones son o no progresiones geométricas:
a) las potencias de base 5
b) los cuadrados de números naturales
c) las raíces de índice par de 2
20. Un sistema de ventas piramidal se basa en que cada nuevo cliente consigue otros 3 nuevos socios cada mes. ¿cuántos clientes habrá en total el cuarto mes si había 12 clientes el primer mes?
21. Calcula la razón y la suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica si $a_7 = 81$ y $a_3 = 9$
22. Escribe el capital resultante tras haber puesto 12500 € a un tipo de interés del 6% durante dos años.
23. Halla la suma de los 4 primeros términos de una progresión geométrica si su primer término es 162 y la suma de sus infinitos términos 243.
24. A Juan le contratan en una empresa durante 5 años y le ofrecen dos posibilidades de contrato laboral: los dos contratos ofrecen un sueldo fijo de 580 € al mes durante el primer año. Para los años siguientes, un tipo de contrato sube 78 € al mes cada año, mientras que el otro incrementa un 12% el sueldo del mes del año anterior. ¿Qué contrato le interesa más a Juan?
25. Un padre reparte 210 € entre sus tres hijos de manera que las tres cantidades forman una progresión geométrica. Calcula qué se llevó cada uno si el menor se llevó 10 €.
26. En la piscina de una urbanización de 81900 litros de capacidad se abre una grieta y comienza a salirse el agua. Durante el primer minuto se pierden 20 litros y en los sucesivos minutos se va perdiendo el doble de lo anterior. ¿Cuánto tarda la piscina en vaciarse?
27. Utilizando la fórmula de la suma infinita de una progresión geométrica, halla la fracción generatriz de los siguiente números periódicos:
a) $0\overline{3}$
b) $1\overline{2}$
c) $3\overline{54}$

El Rincón Multimedia

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS CON CALCULADORA

Escribimos la razón (por ejemplo 6) y pulsamos dos veces la tecla $\boxed{\times}$. Aparecerá entonces una K en la pantalla y entonces cualquier número que escribamos y pulsemos después $\boxed{=}$ quedará multiplicado por 6. Así basta escribir el valor de a_1 y después pulsar sucesivamente $\boxed{=}$.

PROGRESIONES CON EXCEL

La Hoja de Cálculo nos puede ayudar a obtener de manera rápida la cantidad de términos que queramos de una progresión aritmética o geométrica conociendo el primer término y la diferencia o la razón, respectivamente. Veamos cómo se procedería en el caso de las progresiones Geométricas, suponiendo que $a_1 = 2$ y $r = 1,5$.

	A	B
1	r=	1,5
2	a ₁ =	2
3	a ₂ =	3
4	a ₃ =	4,5
5	a ₄ =	6,75
6	a ₅ =	10,125
7		
8		

1. Escribimos en la celda B1 la razón y en B2 el valor de a_1 .
2. Para obtener el valor de a_2 , en B3 escribiremos la fórmula: $=B2*B\$1$ (El símbolo \$ se usa para que esa celda se mantenga fija, donde se encuentra la razón)
3. Usando el botón, copiamos esa fórmula al resto de celdas de la columna B.
4. Recuerda que puedes fijar el número de decimales que aparezcan seleccionando las celdas y yendo a **Formato – Celdas**, y dentro de la pestaña **Números**, selecciona la categoría **Números**.

SUCESIONES CON DERIVE

Podemos usar este programa para, dado el término general de una sucesión, obtener cualquier término conociendo el valor de la posición (n) o hallar la posición en la que se encuentra un término conocido.

1. Iniciamos la sesión usando siempre la configuración original. Si no te lo pregunta al arrancar el programa, ve a **Definir – Restablecer todas las Preferencias**.
2. En la ventana Entrada de Expresiones, escribe la fórmula del término general (sólo el segundo miembro). En nuestro ejemplo, manejaremos la sucesión $a_n = n^2 + 1$.



3. Pulsa INTRO para que aparezca en la ventana Álgebra.
4. Selecciona a continuación **Simplificar – Sustituir variable** y escribe en la ventana que aparece el valor de n que quieras (en el ejemplo, $n = 3$). Si le das al botón **SÍ**, verás la operación detallada y si seleccionas **Simplificar**, obtendrás el resultado.
5. Repite la operación para distintos valores de n .

Para obtener la posición que ocupa un término conocido, se procede igual que cuando resolvíamos ecuaciones, usando la opción **Resolver-Expresión** (aunque ahora la incógnita a obtener es n)

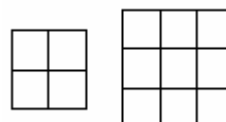
Aplica lo que sabes

REGULARIDADES

Existen gran cantidad de propiedades numéricas y geométricas que, por su, regularidad, pueden expresarse mediante una sucesión:

1. Considera en primer lugar un polígono regular. Si queremos calcular el número de diagonales que tiene, en seguida nos damos cuenta que un cuadrado tiene 2 o un pentágono 5. Para calcular cuántas tendrá un polígono regular de n lados, ten en cuenta que cada vértice está unido mediante diagonales con todos los vértices menos 3 (el propio vértice y los dos contiguos) y que como cada diagonal une dos vértices habrá que tener en cuenta que, al contarlas, repetimos cada una dos veces.

2. Supón que ahora queremos formar cuadrículas con palillos y queremos saber cuántos palillos necesitamos. Si queremos formar una cuadrícula de dos palillos de lado necesitaremos 3 filas de dos palillos cada una. Como necesitamos otras tantas columnas, bastará multiplicar esa cantidad de palillos por dos. Con lo que en total necesitaremos $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ palillos. Si es una cuadrícula de 3 palillos de lado será dos veces cuatro filas de tres palillos. ¿Cuántos palillos harán falta para una cuadrícula de n palillos de lado?



3. Ahora consideramos varias cabañas de vigilancia en un bosque y queremos enlazarlas con caminos de forma que haya un camino entre cada dos casas. Si tenemos n casas, ¿cuántos caminos habrá que construir?

4. Imagina ahora una reunión de trabajo donde todas las personas se saludan estrechándose la mano. ¿Cuántos apretones de mano habrá si a la reunión asisten n personas? ¿Puedes relacionar este problema con otro anterior?

5. Si en lugar de ser una reunión fuera una fiesta a la que acuden sólo parejas, lógicamente cada uno no saluda a su pareja y sí saluda a todas las demás personas. Si acuden n parejas a la fiesta y todos el mundo se saludara estrechándose la mano, ¿cuántos apretones de manos tendrían lugar?

Alrededor de las matemáticas

LA SUCESIÓN DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Una de las sucesiones más importantes de las Matemáticas es la que forman los números primos. Muchas veces se dice que son los generadores del conjunto de los números naturales ya que un número natural o es primo o es producto de números primos.

Desde la Antigüedad han sido objeto de trabajo por parte de los matemáticos. Euclides, en el año 300 a.C. demostró que existían infinitos números primos, mientras que Eratóstenes poco después descubrió un método para determinarlos, la llamada “criba”.

Pero los problemas relacionados con los números primos pertenecen también a la historia reciente. El matemático Christian Goldbach le envió una carta a Euler en 1742 en la que afirmaba que todo número par mayor de 2 era la suma de dos números primos. Esta afirmación, llamada “Conjetura de Goldbach”, ha permanecido sin demostrar hasta este siglo.

Otra conjetura aún sin demostrar es la de los “primos gemelos”, es decir, aquellos pares de números primos cuya diferencia es dos (por ejemplo 11 y 13). La conjetura afirma que existen infinitas parejas de primos gemelos, si bien nadie a fecha de hoy ha demostrado esa afirmación.

1. Explica en qué consiste la criba de Eratóstenes
2. Busca el significado de la palabra “conjetura”
3. Busca pares de primos gemelos mayores que 50.
4. Puedes leer “El tío Petros y la conjetura Goldbach” de Apostolos Doxiadis

LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

Leonardo de Pisa (1175-1240), más conocido como **Fibonacci** planteó el siguiente problema: “*supongamos que tenemos una pareja de conejos. Si cada pareja tarda un mes en madurar sexualmente, cada embarazo dura un mes y en cada parto obtenemos una nueva pareja, ¿cuántas parejas tendremos al cabo de 1 año?*”

La sucesión que forma el número de parejas en los distintos meses se llama **sucesión de Fibonacci** y en ella, como vimos en el apartado dedicado a las sucesiones recurrentes, cada término a partir del tercero es la suma de los dos anteriores

Mes	Pareja original	GENERACIÓN				TOTAL
		1ª	2ª	3ª	4ª	
1º	1					1
2º	1					1
3º	1	1				2
4º	1	2				3
5º	1	3	1			5
6º	1	4	3			8
7º	1	5	6	1		13
8º	1	6	10	4		21
9º	1	7	15	10	1	34
10º	1	8	21	20	5	55

EL RETO

Trata de encontrar el siguiente término de las siguientes sucesiones:

a) 140, 155, 210, 225, 240...

b) 5, 4, 2, 9, 8, 6, 7...

En los dos casos, tienes que mirar un poco más allá de los números...

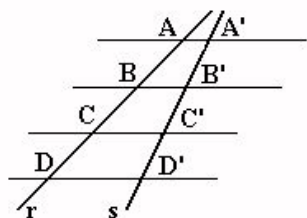
UNIDAD 8. GEOMETRÍA PLANA. FIGURAS EN EL PLANO

TEOREMA DE PITÁGORAS

1. Un foco situado a 10 metros del extremo de un edificio ilumina su parte más alta. El haz de luz que proyecta mide 18 metros. ¿Cuál es la altura del edificio?
2. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:
 - a) hipotenusa = 15 cm, cateto = 9cm.
 - b) cateto = 26 m, cateto = 21 m.
3. Comprueba si es el triángulo de lados 35, 42 y 54 cm es rectángulo o no.
4. a) Determina la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 11 cm.
b) Determina la altura de un rectángulo sabiendo que la diagonal mide 13m y la base 12 m.
5. Determina el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 21 cm.
6. La longitud del lado de un rombo es 12 cm y una de sus diagonales mide 20 cm, calcula lo que mide la otra diagonal.
7. Halla la altura de un triángulo equilátero de lado 8 m.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

8. Averiguar si son semejantes dos triángulos ABC y A'B'C' cuyos ángulos son 17° y 78° para el primer triángulo y 78° y 85°, para el segundo.
9. La sombra que proyecta una estatua en el parque es de 1,9 metros, en el mismo momento una fuente de agua potable que mide 80 cm proyecta una sombra de 40 cm. ¿Cuánto mide la estatua?
- 10.



Sabemos las medidas:

$$\overline{AB} = 5\text{cm}; \overline{BC} = 6,5\text{cm};$$

$$\overline{CD} = 8\text{cm} \text{ y } \overline{A'C'} = 15\text{cm}.$$

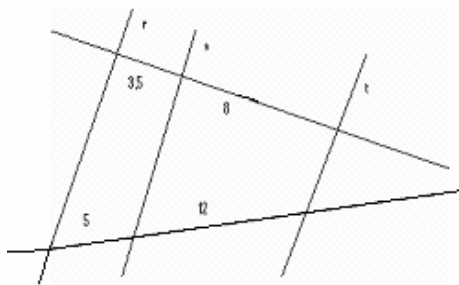
Averigua el valor de $\overline{C'D'}$.

11. Sean dos triángulos de los que conocemos los siguientes datos,
triángulo ABC: $\hat{B} = 32^\circ$, $\overline{AC} = 10\text{cm}$ y $\overline{AB} = 5\text{cm}$. triángulo A'B'C': $\hat{C'} = 120^\circ$, $\overline{A'C'} = 14\text{cm}$ y $\overline{B'C'} = 15,4\text{cm}$.
Suponiendo que son semejantes, averigua los datos que faltan.

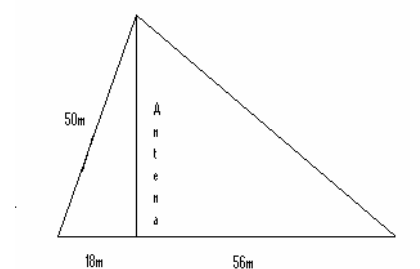
12. Sea un triángulo de lados 5, 12 y 13 cm. Calcula los lados de otro triángulo semejante sabiendo que la razón de semejanza es 1,4.

Si el primer triángulo tiene un ángulo que mide 35° , ¿cuánto miden los otros dos?

13. Determina si las rectas r , s y t son paralelas con los datos que aparecen en la figura:

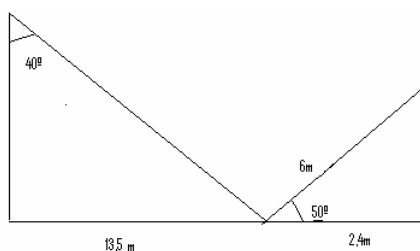


14. En la siguiente figura aparece una antena sujeta por dos cables:



Averigua la altura de la antena y la longitud del otro cable.

15. Una persona se ha situado en una calle en cuyos extremos hay dos edificios de diferente altura, con los datos que aparecen en la figura, calcula la altura de los dos edificios:



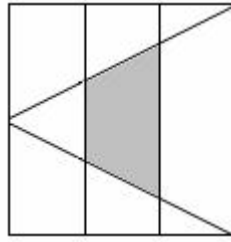
AREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS EN EL PLANO.

16. Dibuja y calcula el área y el perímetro de los siguientes triángulos:

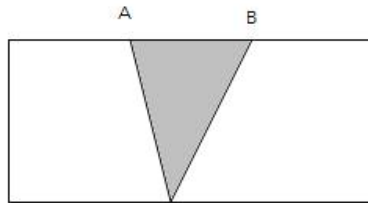
- Un triángulo equilátero de 12 cm de altura.
- Un triángulo isósceles de base 6 cm y altura 8 cm.

17. La diagonal de un rombo, cuyo lado mide 15 cm y la otra diagonal 24 cm, coincide con el lado de un cuadrado. ¿Cuál tiene mayor superficie, el cuadrado o el rombo?

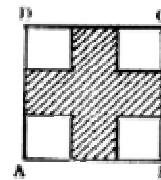
18. Halla el área de la zona sombreada si el cuadrado tiene 18 cm de lado.



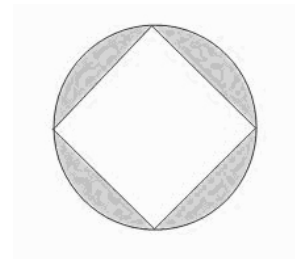
19. ¿Qué porcentaje del área del rectángulo está sombreada si la longitud del segmento AB es 3 cm y el rectángulo tiene unas dimensiones de 8 x 4 cm²?



20. Calcula el área y el perímetro del símbolo de la Cruz Roja sabiendo que la longitud de DB es 10 cm.



21. Halla el área de la región coloreada si la longitud de la diagonal del cuadrado es 12 cm.



22. Dos ventanas, una cuadrada y otra circular, tienen el mismo perímetro. ¿Cuál necesita más superficie de cristal?

23. Si cuando un coche circula a 90 Km/h, sus ruedas dan 8 vueltas por segundo, ¿cuánto mide el radio de sus ruedas?

El Rincón Multimedia

RECTAS NOTABLES CON CABRI

Cabri es un estupendo programa de geometría que no sólo permite representar elementos como vectores, polígonos, segmentos... sino también trabajar con ellos de una manera interactiva.

Consta de una serie de menús de los cuales vamos a utilizar ahora los siguientes:



El **circuncentro** es el punto donde se cortan las tres mediatrices del triángulo.

Selecciona la opción **Triángulo** y dibuja uno cualquiera a través de sus vértices. A continuación, selecciona **Mediatriz** y sitúate sobre cada lado del triángulo y cuando aparezca en el cursor “**Mediatriz de este segmento**”, haz clic y aparecerá dicha recta. Repite el proceso con los otros dos lados del triángulo.

Cambia el color de las mediatrices. Por defecto aparecen en verde. Busca la opción **Color** en el menú correspondiente y coloréalas en azul. Por último, con la opción **Punto(s) de intersección**, determina el circuncentro.

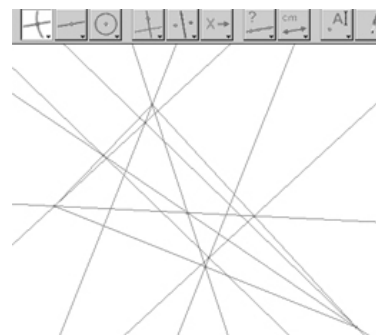
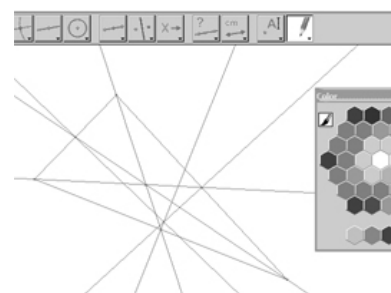
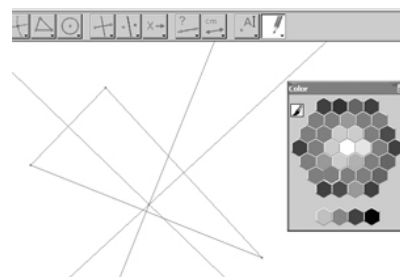
El **baricentro** es el punto donde se cortan las tres medianas del triángulo.

Sobre cada lado del triángulo del apartado anterior, selecciona la opción **Punto medio**. A continuación, ve a **Recta** y sitúa el cursor en un vértice hasta que aparezca “**Por este punto**” y luego ve al punto medio del lado opuesto hasta que ponga “**y este punto**”. Dibuja las otras dos medianas.

Repite los puntos 3 y 4 del apartado anterior, cambiando el color de las medianas a amarillo. No te olvides determinar el baricentro con la opción **Punto(s) de intersección**.

El **ortocentro** es el punto donde se cortan las tres alturas del triángulo.

Aquí, la opción a utilizar es **Recta perpendicular**, pues la altura está en la perpendicular a cada lado que pasa por el vértice opuesto. Tras seleccionar dicha opción, has de ir a cada lado del triángulo hasta que aparezca “**Perpendicular a este lado del triángulo**” y luego ir al vértice opuesto y que aparezca “**Por este punto**”. Determina el ortocentro.

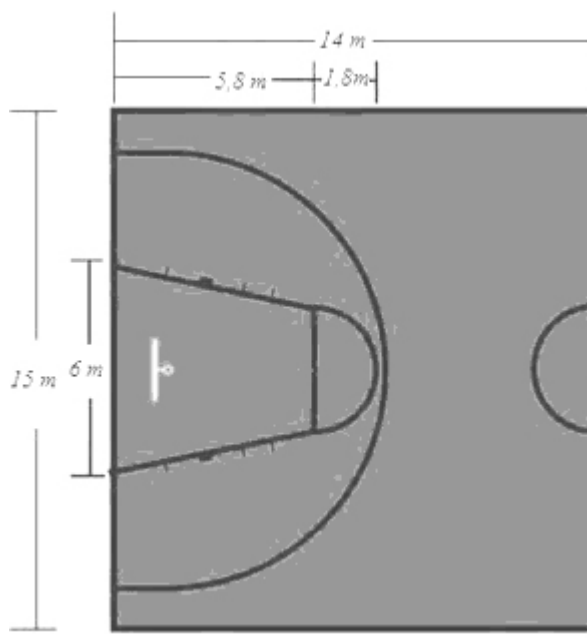


Aplica lo que sabes

CANCHA DE BALONCESTO

En el patio del instituto van a pintar las líneas de una cancha de baloncesto. Las medidas oficiales que debe tener la cancha son:

- Las dimensiones totales son 28 m x 15 m
- La zona tiene forma de trapecio y su base mayor mide 6 m.
- El semicírculo de los tiros libres tiene un radio de 1,8 m
- Alrededor de la zona de tiros libres está la línea de tiros de tres.



1. Si en vez de pintar las líneas en el patio, se instalara una cancha de parquet en un pabellón cubierto, ¿cuánto costaría cubrir todo el campo a 40 € el metro cuadrado de parquet?
2. ¿Cuál es el área de la zona? Ten en cuenta que es un trapecio, considera qué datos necesitas y búscalos entre los datos oficiales y las medidas del plano?
3. Si el aro mide 45 cm de diámetro y tiene 16 mm de grosor. ¿Cuál es la superficie del hueco por donde tiene que entrar el balón?
4. Seguro que recuerdas que la línea de 3 puntos está situada a 6,25 m. Esta línea está formada por dos segmentos rectos, uno a cada lado, que miden 1,575 m y un semicírculo cuyo centro está justo debajo del aro y cuyo radio es precisamente 6,25 m. ¿Cuál es entonces la superficie de la zona de tiros de dos puntos, (que es precisamente la que está situada dentro de la línea de tres)?
5. ¿Qué porcentaje del total de la cancha ocupa la zona de dos puntos?
6. Si un jugador lanza un tiro de 3 puntos desde una esquina tiene poco espacio ya que no puede pisar la línea exterior del campo (le pitarian infracción por salirse del campo) ni pisar la línea de tres puntos (considerarían que es un tiro de dos puntos) ¿Cuánto mide la distancia que hay entre ambas líneas?

Alrededor de las matemáticas

MEDIDA DE DISTANCIAS INACCESIBLES

Para medir distancias a las que no podemos acceder, se utiliza, entre otros métodos, la semejanza de triángulos. El matemático griego Thales de Mileto (624 a.C.-547 a.C.) fue el primero del que se sabe a ciencia cierta que utilizó este tipo de cálculos. Así, se le atribuyen la resolución de los problemas de calcular la distancia de un barco a la costa y el de determinar la altura de una pirámide.

En concreto calculó cuál era la altura de la pirámide de Keops. Para hacerlo, esperó a la hora del día en que los rayos de sol incidieran de tal forma que su propia sombra fuera igual a su altura. En ese instante, por semejanza, la altura de la pirámide también sería igual a la longitud de su sombra por lo que bastaría con medir ésta última.

Este tipo de problemas son clásicos de la agrimensura, disciplina que se encarga de la medida de las tierras. Los agrimensores han realizado este trabajo durante siglos con la ayuda de objetos sencillos como cuerdas, plomadas o brújulas. De esta forma han sido capaces de resolver cuestiones como calcular la anchura de un río o medir distancias en lugares de difícil acceso.

1. Busca el dato de la altura de la pirámide de Keops.
2. ¿Sabes qué es una plomada?
3. Enumera ejemplos de distancias que no se puedan medir directamente por no ser accesibles.

NÚMEROS PITAGÓRICOS

Si has aplicado varias veces el Teorema de Pitágoras, habrás visto que no es fácil encontrar tres números enteros y positivos que cumplan $a^2 = b^2 + c^2$. A las ternas de números que lo cumplen se les denomina pitagóricos y los más sencillos son 3, 4 y 5. Los egipcios ya conocían estos números y los utilizaban para formar ángulos rectos en los terrenos con la ayuda de una recta de 12 nudos.

No hay tantas ternas de números pitagóricos que no sean múltiplos de 3, 4 y 5. Otras son 5, 12 y 13 o 7, 24 y 25. ¿Podrías encontrar más?

CINTURONES

Una propiedad de la circunferencia que cuesta creer es la que se resume en este ejemplo: imagina que atamos una cuerda alrededor de una pelota y que fuéramos capaces de atar una cuerda alrededor de la Tierra. Si añadiéramos un metro a la longitud de cada una de las cuerdas, ¿cuál quedaría más holgada, es decir, cuál quedaría más separada de la superficie?

Aunque uno piensa que la cuerda de la Tierra, por su longitud, apenas se separaría, las dos se separarían la misma distancia. Esto es porque la nueva circunferencia mediría $L = 2\pi R + 1$ con lo que el nuevo radio sería $R' = \frac{2\pi R + 1}{2\pi} = R + \frac{1}{2\pi}$, es decir aumentaría $\frac{1}{2\pi} \approx 0,16m$, valga lo que valga el radio.

EL RETO

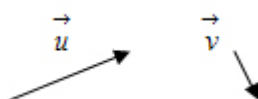
Cuando el dueño de una casa de campo va a comprar leña le cobran 20 € por el hatillo de ramas que se puede atar con una cuerda de un metro. Al día siguiente lleva 40 € y una cuerda de dos metros y le pide al vendedor que por ese dinero le prepare un montón de leña para atar con esa cuerda, pero el vendedor se niega. ¿Por qué?

UNIDAD 9. MOVIMIENTOS EN EL PLANO

VECTORES.

1. Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BA}$ sabiendo que $A = (1,4)$ y $B = (-2,5)$

2. Suma los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura



3. Calcula $2\vec{u}$, $-3\vec{u}$ y $-\vec{u}$, siendo $\vec{u}$ el vector de la figura anterior.

4. Dadas las figuras:

Figura 1

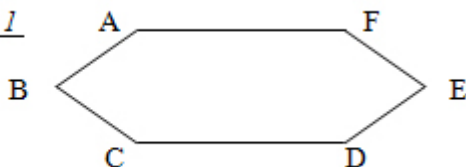
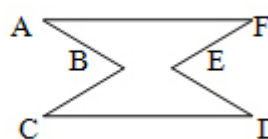


Figura 2



Indica si los siguientes vectores son equipolentes:

a) $\vec{AB}$ y $\vec{DE}$

b) $\vec{AF}$ y $\vec{CD}$

c) $\vec{BC}$ y $\vec{EF}$

d) $\vec{BA}$ y $\vec{CD}$.

5. Calcula gráficamente los vectores

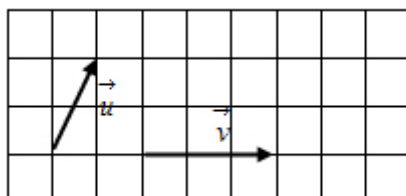
a) $\vec{a} = 2\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{b} = -\vec{u} - \vec{v}$

c) $\vec{c} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$

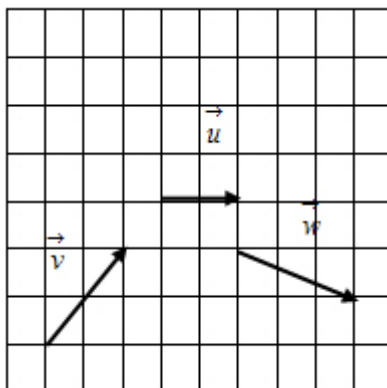
d) $\vec{d} = -\vec{u} + 2\vec{v}$

siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores:



6. Construye un vector con origen en $C = (1,3)$ que sea equipolente a $\vec{AB}$ donde $A = (2,3)$ y $B = (-3,2)$.

7. Halla las coordenadas de los vectores de la figura:



8. Sabiendo que $\vec{u} = (1,3)$, $\vec{v} = (4,2)$ y $\vec{w} = (-2,3)$, calcula los siguientes vectores:

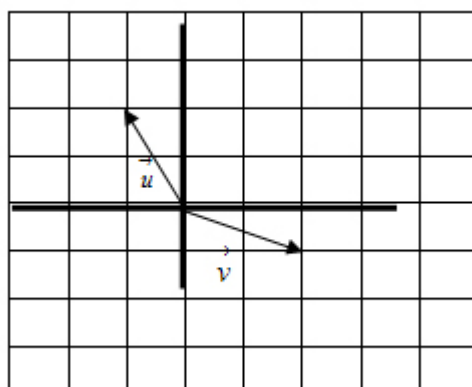
a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

b) $\vec{u} + 2\vec{v}$

c) $\vec{u} - \vec{w}$

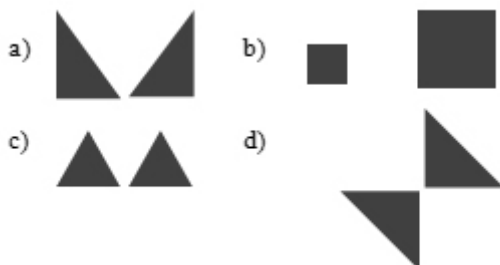
d) $2(\vec{v} + \vec{w})$.

9. Calcula gráficamente $\vec{u} + \vec{v}$ siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores de la figura:

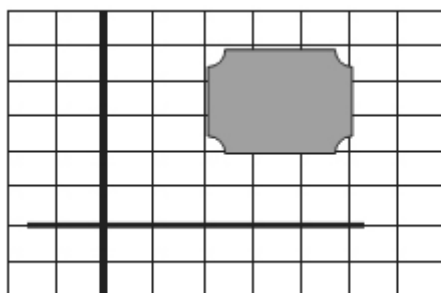


MOVIMIENTOS: TRASLACIONES, GIROS Y SIMETRÍAS.

10. Indica si son movimientos las siguientes transformaciones:



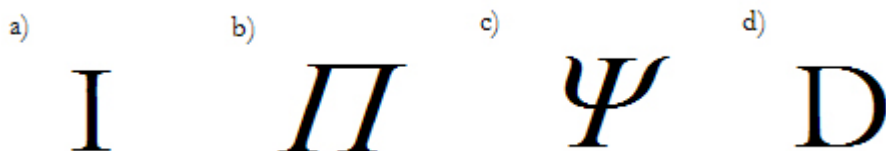
11. En la figura:



- a) Realiza una traslación de vector $\vec{u} = (-1, 2)$.
- b) Si sobre la figura obtenida en el apartado anterior realizamos una segunda traslación de vector $\vec{v} = (3, 4)$. El resultado al que llegamos, ¿sería el mismo que si hubiéramos hecho una traslación de vector $\vec{u} + \vec{v}$? Comprueba el resultado.

12. Si realizamos 6 giros sucesivos de 60° de un punto P respecto de otro punto O. ¿Qué obtienes?

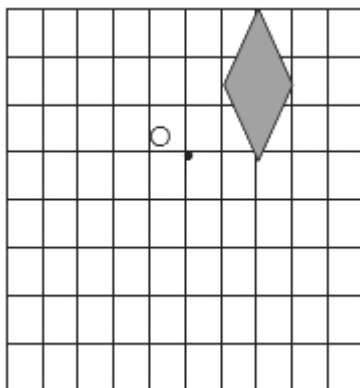
13. Indica qué letras o símbolos siguientes tiene eje de simetría:



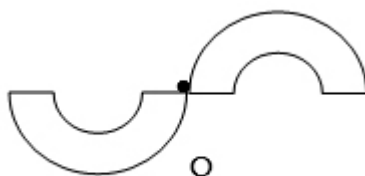
14. Dibuja la figura simétrica de la figura dada respecto de la recta indicada:



15. Dibuja la figura simétrica de la figura dada respecto del punto O:

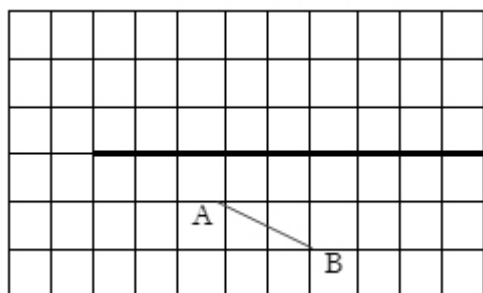


16. Indica si hay simetría respecto a O en:

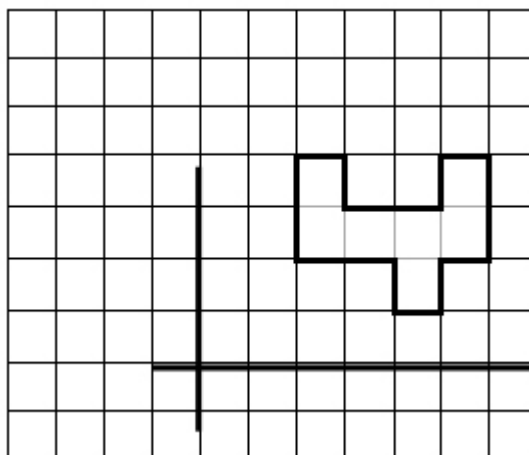


17. Representa el punto $A = (2, 1)$. Dibuja el punto homólogo a A al realizar $G(O, 180^\circ)$ donde O es el origen de coordenadas.

18. Dibuja el segmento simétrico del segmento de la figura respecto del eje e:



19. Dada la figura:



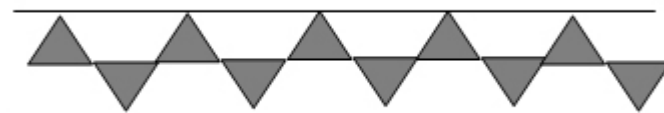
- Realiza una traslación de vector $\vec{u} = (1,2)$.
- En la figura que obtenemos en el apartado anterior realiza un giro respecto al origen de coordenadas de ángulo 90° .
- Dibuja la figura simétrica a la del enunciado respecto al eje X.
- Dibuja la figura simétrica a la del enunciado respecto al eje Y.

20. Irene y Belén están jugando con la pelota. El juego consiste en lanzarse la pelota una a otra botando una vez en el suelo. Deben coger la pelota sin moverse del sitio. Le toca lanzar a Irene, ¿dónde debe botarla para que la pelota haga el menor recorrido?

MOSAICOS Y CENEFAS

21. Dibuja una cenefa generada por un motivo con un cuadrado y un rectángulo de diferentes colores.

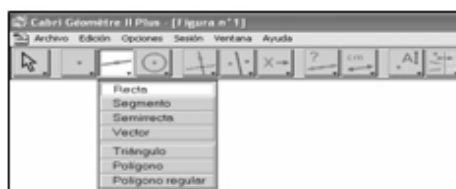
22. Encuentra el motivo que genera el friso:



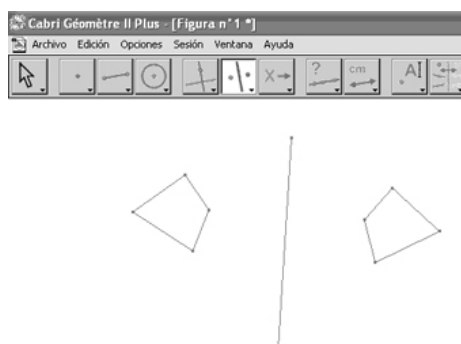
El Rincón Multimedia

MOVIMIENTOS CON CABRI

Básicamente trabajaremos con los siguientes menús de la barra de herramientas:



Simetría respecto a un eje

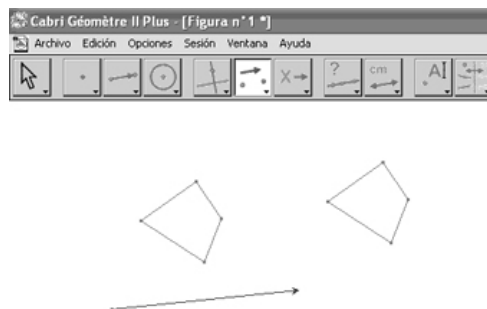


Representa un polígono cualquiera. Selecciona para ello los vértices que desees. Dibuja, haciendo uso del mismo botón, un segmento o una recta cualquiera, fuera del cuadrilátero anterior.

Selecciona **simetría axial** y al situar el ratón sobre cualquier lado del polígono aparecerá “**Simetría de este polígono**”. Selecciónalo. Ve al segmento y cuando veas “**con respecto a este segmento**”, lo seleccionas y aparecerá la figura simétrica. Si

activas el **Apuntador** , y te sitúas sobre el segmento, modificándolo, verás que también cambia la figura simétrica.

Traslación de una figura



Dibuja un polígono cualquiera. Representa un vector, selecciona **Traslación** y sitúate sobre el polígono. Te señalará “**Traslación de este polígono**”.

Sitúate sobre el vector y te aparecerá “**según este vector**”. Al seleccionarlo, tendrás la figura trasladada.

Rotación

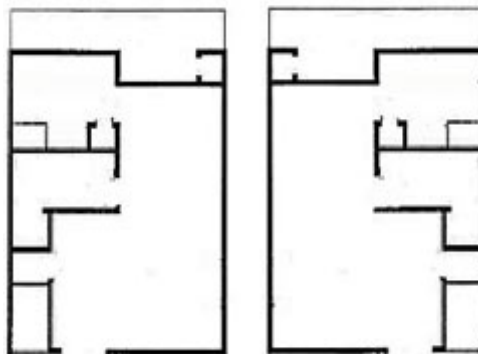
Para realizar una rotación, has de seguir los siguientes pasos. Intenta hacerlo:

1. Dibuja un polígono cualquiera.
2. Representa un ángulo (lo puedes hacer en la opción marcando un ángulo con 3 puntos, donde el segundo es el vértice) o dibujando dos segmentos con un vértice común y luego medir el ángulo.
3. Dibuja un punto cualquiera fuera del polígono.
4. Selecciona la opción de **Rotación**. A continuación te pedirá **de qué polígono**, sitúate sobre el punto y te dirá **alrededor de este punto** y por último, señala el ángulo que será el de rotación.

Aplica lo que sabes

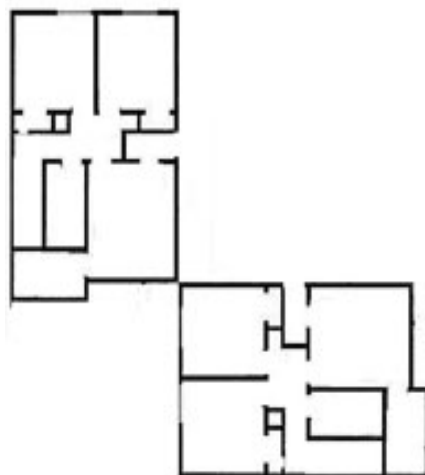
En un edificio de viviendas, según el diseño que haya realizado el arquitecto, los distintos pisos de una planta pueden distribuirse de muchas maneras. Si los pisos tienen todos el mismo tamaño, podemos considerar que unos se transforman en otros mediante movimientos.

1. Fíjate en este primer ejemplo. ¿Qué tipo de movimiento transformaría un piso en el otro?

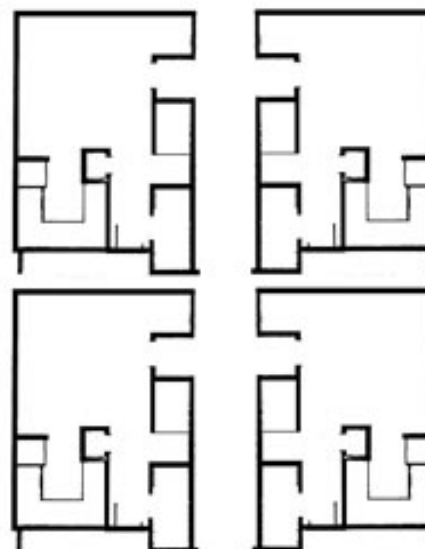


2. Si tuvieras este plano en un papel suelto, ¿cómo podrías comprobar que los dos pisos son exactamente iguales?

3. Este otro ejemplo podría corresponder a la esquina de un edificio. ¿Qué tipo de movimiento crees que se ha utilizado? ¿Puedes decir alguna de sus características?



4. Observa ahora esta distribución. Aquí se combinan varios movimientos. ¿Podrías decir cuáles son?



5. Si quisiéramos transformar esta distribución en otra de manera que los cuatro pisos y el pasillo mantengan sus dimensiones pero las puertas de las viviendas ocupen otra posición, ¿qué pisos moveríamos y qué tipo de movimiento aplicaríamos?

Alrededor de las matemáticas

ZURDOS Y DIESTROS

Aunque el ser humano es básicamente simétrico, los dos lados del cuerpo no tienen la misma importancia. Los dos hemisferios del cerebro controlan el cuerpo de forma cruzada: el hemisferio derecho controla la parte izquierda del cuerpo mientras que el izquierdo controla la parte derecha. Normalmente es el hemisferio izquierdo el dominante por lo que la mayoría de las órdenes se dan al lado derecho. Es el caso de las personas diestras.

En los zurdos, sin embargo, domina el hemisferio derecho por lo que es la parte izquierda la que recibe más órdenes. Aunque normalmente se asocia el hecho de ser zurdo con la escritura y, en general, con el uso predominante de la mano izquierda, esa preferencia también se extiende a otras partes del cuerpo como la vista o los pies (por ejemplo, al elegir de forma espontánea el pie con el que chutar un balón).

El problema de las personas zurdas es que muchos elementos de la sociedad están pensados sólo para diestros. Por ejemplo, las barandillas de las escaleras, utensilios como abrelatas o tijeras, o instrumentos como la guitarra. Por eso cada vez es más frecuente que se fabriquen productos específicos para personas zurdas e incluso ya hay tiendas dedicadas específicamente a este tipo de productos.

1. ¿Hay en tu centro alguna silla específica para zurdos? ¿Cómo es? Si no la hay, ¿qué tipo de silla crees que no puede diseñarse igual para zurdos que para diestros?
2. Localiza por Internet alguna tienda para zurdos y revisa los productos que ofrece
3. Busca el significado de la palabra *hemisferio*. ¿En qué otras situaciones se utilizan?
4. Otro ejemplo de asimetría en el ser humano es el rostro. Si situas un espejo tapando una mitad de cara y de manera que se refleje la otra, comprobarás que los rostros que genera cada mitad tienen bastantes diferencias.

EL RETO

Este interesante problema se le atribuye a Lewis Carroll, el autor de “Alicia en el País de las Maravillas”. Un noble tenía en su habitación una ventana cuadrada de 3 pies de ancho por 3 pies de alto, pero entraba demasiada luz y él tenía un problema en los ojos. Le pidió a un albañil que modificase la ventana de manera que entrase la mitad de luz pero la ventana siguiera siendo cuadrada y de 3 pies de alto por 3 pies de ancho. Por supuesto, el cristal debía estar limpio, sin cortinas, cristales pintados ni nada.

(Nota: para resolver hay que usar algo que no es un movimiento exactamente, aunque se le parece...)

AMBIGRAMAS

Los ambigramas son palabras o frases elaboradas de tal manera que, al girarlas en horizontal o en vertical, se lee el mismo texto o uno nuevo.



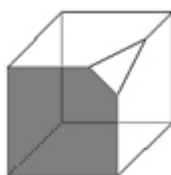
Fíjate, por ejemplo en cómo hemos escrito el nombre de Marina Suárez. Aunque algunas letras estén escritas de manera un poco extraña, tiene la interesante propiedad de que al girarlo en vertical se lee exactamente el mismo.

Por supuesto, hay artistas que elaboran ambigramas mucho más artísticos. Quizá los más famosos son **Scott Kim** y **John Langdon** (algunos de cuyos ambigramas se incluían en la novela “El código da Vinci”)

UNIDAD 10. FIGURAS EN EL ESPACIO I

POLIEDROS. TEOREMA DE EULER

1. Un cubo, ¿es un poliedro cóncavo o convexo? ¿Y un octaedro?
2. Comprueba que el siguiente poliedro verifica el Teorema de Euler:



3. Dibuja el desarrollo de los siguientes poliedros:

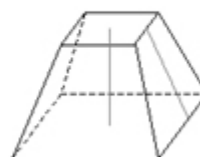
a)



b)



c)



4. ¿Por qué en un poliedro no puede haber un vértice en el que concurran 4 cuadrados?

PRISMAS

5. ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian un cubo de un ortoedro?
6. Una piscina tiene de dimensiones 25 m de longitud, 10 m de anchura y 2m de profundidad. Halla qué cantidad de litros de agua hacen falta para llenarla.
7. ¿Cuál es el área de un prisma hexagonal regular, con arista lateral 8 cm y lado base 5 cm?
8. Con una plancha de cartón de 5 metros cuadrados, queremos fabricar cajas de zapatos de dimensiones 20x25x30 cm. ¿Cuántas cajas podremos construir con dicha plancha?

9. Calcula el volumen de las siguientes figuras:

- a) Prisma triangular de base un triángulo rectángulo de cateto 2 cm, hipotenusa 4 cm y altura 10 cm.
- b) Prisma heptagonal regular de lado 8 cm, radio base 5,1 cm y altura 7 cm.
- c) Ortoedro de medidas 7, 5 y 2 cm.

10. ¿Cuánto vale la longitud del lado de un cubo cuyo volumen es igual al de un ortoedro de lados 2, 4 y 8 cm?

11. Halla las dimensiones de un ortoedro sabiendo que sus medidas son proporcionales a 2, 5 y 8 y su volumen es de 2160 m³

12. Halla la diagonal de un cubo de arista a cm. Resuélvelo para el caso particular de $a = 5$ cm.

13. La diagonal de un cubo mide $5\sqrt{3}$ cm. Halla su área y volumen

PIRÁMIDES. TRONCOS DE PIRÁMIDES

14. Desarrolla sobre el plano una bipirámide hexagonal.

15. Halla el área de una pirámide octogonal regular de radio de la base 4 cm, apotema de la base 3 cm y altura 5 cm.

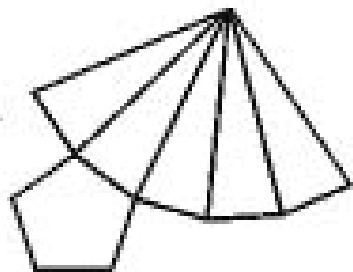
16. Calcula el volumen de una pirámide recta de base un rectángulo con medidas 3 y 5 cm y cuya altura es de 7 cm.

17. En un tronco de pirámide, los trapecios laterales son escalenos. ¿Cómo es la pirámide de la que proviene el tronco?

18. Queremos forrar con tela un taburete que tiene la siguiente forma de tronco de pirámide. El asiento es un cuadrado de 30 cm de lado, cada pata mide 80 cm y el cuadrado que determina en el suelo mide de lado 50 cm. ¿Cuánto costará forrarlo si el metro cuadrado de tela cuesta 12 euros?

19. Halla el volumen de un tetraedro regular de 4 cm de arista.

20. Halla el área de la pirámide que tiene el siguiente desarrollo:



Radio Base = 10 cm.

Lado base = 6 cm.

Apotema lateral = 12 cm

PLANOS DE SIMETRÍA Y EJES DE ROTACIÓN

21. Un ortoedro (una caja de zapatos, por ejemplo), ¿tendría más o menos planos de simetría que un cubo? Justifica la respuesta.

22. ¿Cuántos planos de simetría tiene un octaedro?

23. ¿Cuántos planos de simetría tiene un prisma hexagonal regular?

24. ¿Puede haber algún prisma que no tenga planos de simetría? Razona la respuesta.

25. ¿Cuántos ejes de rotación tiene un octaedro?

El Rincón Multimedia

POLIEDROS CON CABRI

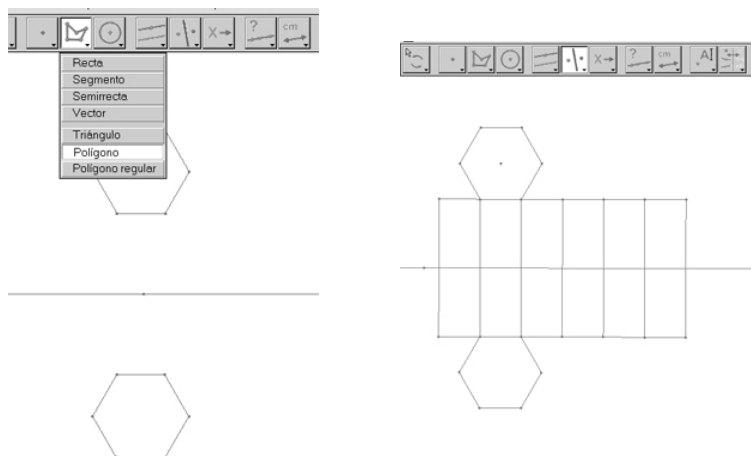
Desarrollos planos de poliedros

Vamos a desarrollar un prisma hexagonal regular. Utilizaremos, además de las opciones vistas en el tema anterior, las que aparecen en el menú **Construir**

Dibuja un hexágono regular con la opción de **Polígono regular**, estableciendo el número de lados en 6. Inserta un punto cualquiera fuera del hexágono.

Selecciona **Recta paralela**. Sitúate sobre un lado del hexágono, y pondrá **Paralela a este lado del polígono**. Ve ahora al punto hasta que aparezca **Por este punto**. Dibuja el polígono simétrico tal y como viste en el tema anterior. Ya tenemos las bases.

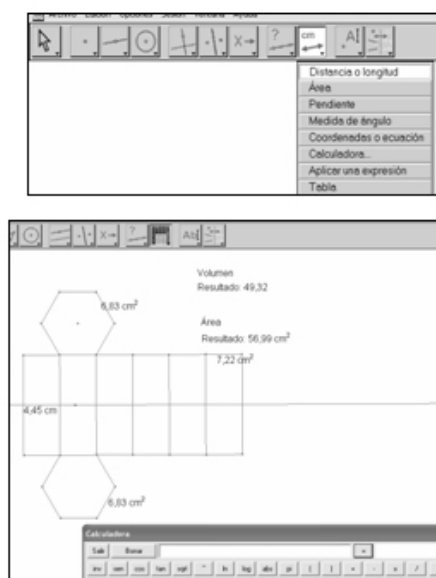
Para los rectángulos laterales, selecciona **Polígono** y completa el que une las dos bases. Luego, por simetrías a derecha e izquierda, completa el desarrollo del hexágono.



Cálculo de áreas y volúmenes

Para hallar el área y volumen del poliedro anterior, iremos al menú de la derecha

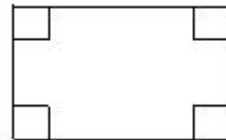
1. Selecciona **Área** y sitúate sobre los hexágonos de las bases y algún rectángulo. Así obtendrás: 6,83 y 7,22 cm^2 respectivamente.
2. Con **Distancia o longitud**, halla la altura del prisma (4,45 cm).
3. Ve a la opción de **Calculadora**, dentro del mismo menú y halla el área y el volumen.
4. Puedes arrastrar los resultados obtenidos fuera de la calculadora y situarlos donde desees.



Aplica lo que sabes

CONSTRUCCIÓN DE CAJAS

Queremos construir a partir de una lámina de cartón de 30 cm de largo por 20 de ancho una bandeja para dejar el material de escritorio. Para hacerlo recortamos un cuadrado de cada una de las esquinas, tal como aparece en la imagen.



1. Si recortamos en cada esquina un cuadrado de 5 cm de lado, ¿cuál sería la capacidad de la bandeja?
2. Si llamamos x al lado del cuadrado recortado en la esquina, ¿cuál sería la expresión de la capacidad de la bandeja en función de x ?
3. En su último viaje, una amiga nos ha traído uno de esos lápices larguísimos que venden de recuerdo en los museos. Si finalmente hemos hecho la bandeja cortando el cuadrado de 5 cm de lado en cada esquina, ¿nos cabrá el lápiz en la bandeja si mide 22 cm (no hace falta colocarlo recto)? ¿Cuál será el lápiz más largo que puede caber si ni siquiera pedimos que esté apoyado en la base de la bandeja?
4. Si utilizamos un lápiz normal de 15 cm de forma hexagonal, ¿cuál será su volumen si el hexágono de la base mide 3 mm de lado?
5. Cuando sacamos punta al lápiz, ¿la forma de qué figura tiene la parte afilada si es totalmente puntiaguda? ¿Cuál sería el volumen de esa parte afilada si mide 1 cm de largo? Teniendo en cuenta esto, ¿qué proporción del lápiz se desperdicia al sacar punta?
6. Si en vez de usar una bandeja de cartón utilizamos una caja cúbica de madera sin tapa, calcula su capacidad si la longitud de su arista es 20 cm y el grosor de la madera es de 1 cm.

Alrededor de las matemáticas

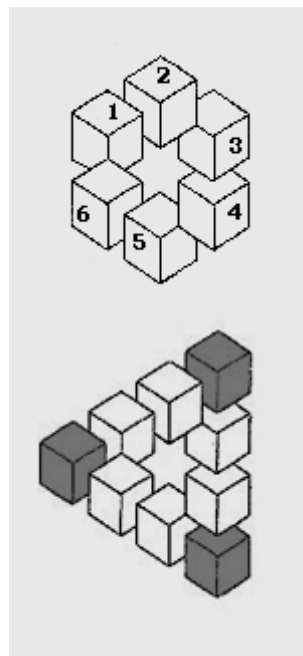
FIGURAS IMPOSIBLES

Llamamos figuras imposibles a aquellas que se pueden representar en dos dimensiones pero no se pueden construir en la realidad.

El origen del estudio de las figuras imposibles tuvo lugar en 1934. En aquel año el artista Oscar Reutersvard era sólo un estudiante que, aburrido en las clases, llenaba de figuras los márgenes de los libros. Uno de sus pasatiempos preferido era dibujar estrellas de varias puntas lo más regulares posible. Un día trató de dibujar una estrella de 6 puntas rodeándola de cubos. Cuando lo hizo, descubrió que los cubos formaban una figura extraña.

Efectivamente, así es. Los cubos forman 3 filas: el 1 y el 2, el 3 y el 4 y el 5 y el 6. La primera fila y la tercera son horizontales mientras que la segunda es vertical. Los cubos 1 y el 6, por un lado, parecen en un mismo plano mientras que entre los cubos 2 y 5 hay una diferencia de altura, lo cual es absurdo porque las filas que forman 1 y 2 y 5 y 6 son horizontales.

De todas formas, la intuición de Reutersvard le llevó a colocar tres nuevos cubos en la esquinas de manera que formaban un triángulo perfecto... e imposible.



1. Investiga sobre otras figuras imposibles
2. Los logotipos de algunas empresas, sobre todo inmobiliarias o dedicadas a la construcción, utilizan figuras imposibles en sus logotipos. Fíjate en los logotipos que veas en las obras o los anuncios porque puedes detectar algunos.
3. Te recomendamos la lectura del libro "Un mundo de figuras imposibles" (Taschen) de Bruno Ernst
4. Aunque este tipo de figuras no se puede construir, sí se pueden realizar esculturas que, vistas desde un cierto punto de vista, lo parezcan. Busca información, por ejemplo, de la escultura que hay en Perth (Australia) y que en apariencia representa un triángulo imposible.

EL RETO

Cuando Alicia se enfrentó al problema de formar, con seis cerillas, cuatro triángulos equiláteros, le dio muchas vueltas hasta que, descubrió que ella misma se había puesto una condición que no era obligatoria. ¿Sabes cuál era?

SÓLIDOS PLATÓNICOS

Los poliedros regulares también se llaman platónicos porque Platón los relacionó con los cuatro elementos (fuego, aire, agua y tierra) y el Universo (que identificó con el Icosaedro).

UNIDAD 11. FIGURAS EN EL ESPACIO II

CUERPOS DE REVOLUCIÓN

1. Dibuja los cuerpos de revolución que generan las siguientes figuras al girar por sus lados:

a)

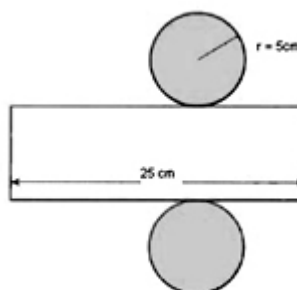


b)



CILINDROS

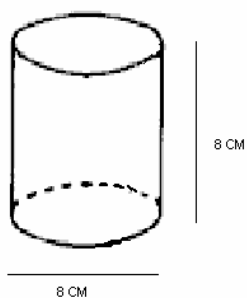
2. ¿Qué falla en el siguiente desarrollo?



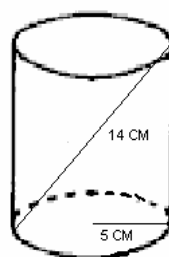
3. Dibuja un cuadrado de lado 3 cm y hazlo girar por uno de los lados. ¿Qué figura se obtiene? ¿cuánto mide el diámetro de las bases generadas?

4. Halla el área total y el volumen de los siguientes cilindros:

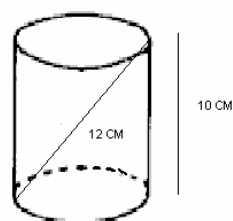
a)



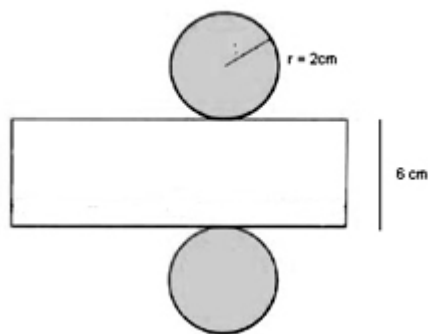
b)



5. ¿Cuánto vale el área del siguiente cilindro?



6. Halla el área del cilindro que tiene como desarrollo:



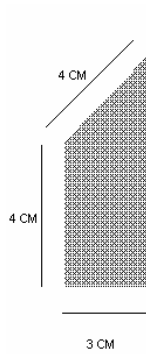
CONO. TRONCO DE CONO

7. Dibuja el desarrollo plano de un cono de radio de la base 4 cm y generatriz 12 cm.
8. Halla la altura de un cono recto de generatriz 7 cm y radio de la base 2 cm.
9. Un cono tiene de radio 5 cm. ¿Por qué no puede tener una generatriz de 4 cm?
10. Halla el área y volumen de un cono cuya generatriz mide 6 cm y altura 5 cm.
11. Un cono tiene de área total $34,58 \text{ cm}^2$. Halla la generatriz, sabiendo que el radio es de 2 cm.
12. Halla el área y volumen del tronco de cono cuyos radios son 3 y 7 cm y generatriz 10 cm.
13. Un cubilete de dados tiene forma de tronco de cono. ¿Qué cantidad de tela se usará para forrarlo por dentro si los radios de las bases son 9 y 7 cm y la altura es de 8 cm?
14. Un reloj de arena está formado por dos conos unidos por su vértice. El radio de la base del reloj es de 3 cm. Halla la altura si el volumen que cae cada minuto de los 10 que dura el reloj es de $21,2 \text{ cm}^3$ de arena.

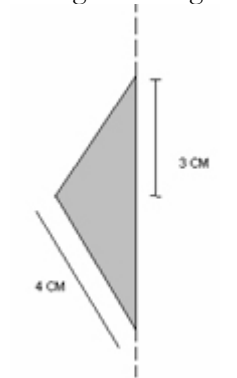


15. Calcula el área y volumen de los cuerpos que se obtienen al girar las siguientes figuras:

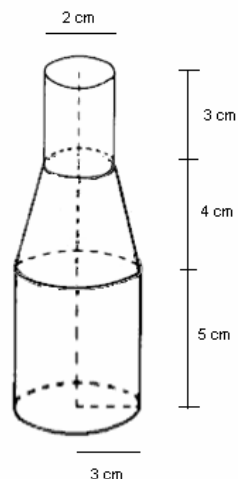
a)



b)



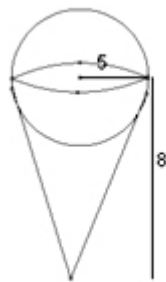
16. Halla el área y volumen de la siguiente figura.



ESFERA. EL GLOBO TERRÁQUEO

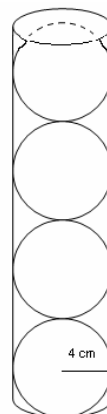
17. ¿Qué región esférica obtendrías al hacer girar tan sólo un cuarto de círculo alrededor del eje?
18. ¿Cuántas circunferencias máximas se pueden obtener? Dibuja algunas de ellas
19. ¿Cuál es el volumen de la esfera terrestre? (Radio de la Tierra = 6371 km)

20. Halla el área y el volumen de la siguiente figura. Expresa las medidas en cm.



21. ¿Cuál es la distancia entre dos puntos que, estando en el mismo meridiano, uno se sitúa sobre el ecuador y el otro en el paralelo 37?
22. Calcula la superficie de un huso horario.
23. ¿Cuál es el volumen de aire en el interior del bote de pelotas de tenis?
24. La superficie de una esfera es de $78,5 \text{ dm}^2$. Halla su volumen.

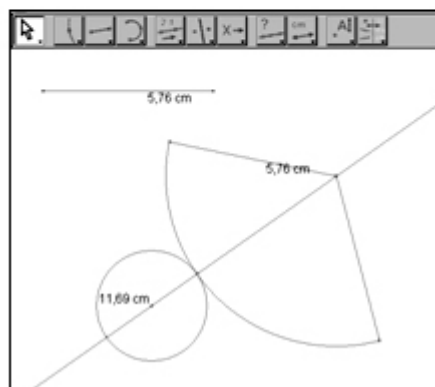
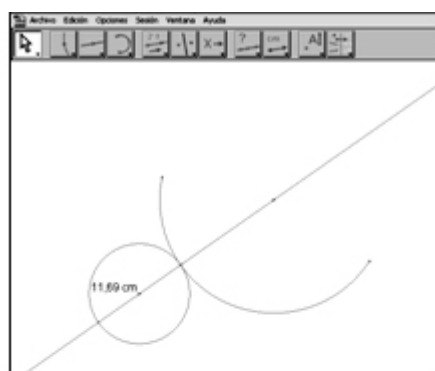
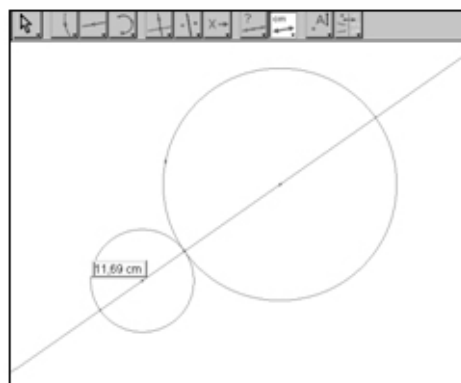
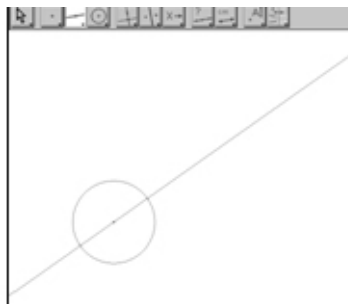
25. ¿Qué volumen de agua ha quedado en un recipiente cúbico de 1 m de lado al introducir tres esferas sólidas de radio 0,2 m?



El Rincón Multimedia

DESARROLLO DEL CONO CON CABRI

1. Dibuja la circunferencia que será la base del cono. Ve a **Recta** y sitúate en el centro de la circunferencia hasta que ponga **Por este punto**. Dibuja una cualquiera
2. Ve a **Punto sobre un objeto** e inserta uno sobre la recta anterior. Con ese punto como centro, dibuja una circunferencia tangente a la inicial.
3. Con la opción **Distancia o longitud** activada, sitúate en la primera circunferencia hasta que ponga **Perímetro de esta circunferencia**. Cálculalo.
4. Inserta un punto en la circunferencia mayor.
5. Ve a **Transferencia de medidas** y traslada, seleccionándolo, la longitud de la base al punto anterior. Aparecerá un punto sobre la circunferencia situado a esa distancia.
6. Con la opción **Arco**, selecciona los tres puntos sobre la circunferencia mayor. Ve a la opción de **Ocultar/Mostrar** y oculta ésta, para que sólo aparezca el arco.
7. Dibuja sendos segmentos (las generatrices) desde los extremos del arco al punto que será la cúspide del cono.
8. Mide la longitud de estos últimos segmentos.
9. Si tenemos aparte dibujado un segmento con la medida de la generatriz podemos, pinchando en la cúspide, moverla hasta obtener una medida igual.



Aplica lo que sabes

VASOS Y COPAS

Vamos a utilizar los conceptos que hemos aprendido sobre la medida del volumen de la esfera y el cono para realizar algunos cálculos relacionados con distintos tipos de vasos y copas.

1. Imagina una copa de champán en la que la parte donde se vierte el líquido es de forma cónica. Si esa parte tiene 12 cm de altura y la copa tiene $50,24 \text{ cm}^3$ de capacidad, ¿cuál será el diámetro del borde de la copa?



2. Tenemos un juego de vasos de forma cilíndrica. Sabemos que hace falta llenar 5 vasos completos para sumar un litro. ¿Cuál es el diámetro del vaso si su altura es 15 cm?



3. Si en uno de esos vasos, lleno de agua hasta la mitad, introducimos una bola esférica de metal de 3 cm de radio, ¿rebotará el agua?

4. El agua que se obtiene al fundir un centímetro cúbico de hielo sólo ocupa $0,9 \text{ cm}^3$. Conociendo este dato, ¿en qué porcentaje podemos decir que aumenta el volumen del agua al congelarse?

5. ¿Hasta qué altura podríamos llenar de agua uno de los vasos cilíndricos del ejercicio 2 de forma que al congelar el agua, no sobrepasara el borde del vaso?

Alrededor de las matemáticas

EDIFICIOS EN BUENA FORMA

Muchos edificios de distintos rincones del mundo tienen formas que se alejan de la idea que tenemos de un edificio clásico.

Un ejemplo conocido es la esfera bioclimática de la Expo 92 de Sevilla. También tienen forma de esfera uno de los edificios de EPCOT, uno de los parques temáticos de Walt Disney, o las instalaciones de algunos de los cines con el sistema IMAX, como los de Madrid o París.

Además de las plazas de toros, el edificio del senado en Madrid, por ejemplo, tiene forma de cilindro. Es una forma muy usual en rascacielos de las grandes ciudades. Así, la Torre Agbar, en Barcelona, está formada por dos cilindros no concéntricos que culminan en una cúpula.

Pero no es necesario fijarse sólo en los grandes edificios. Por ejemplo, uno de los tipos de vivienda que se utiliza en África es el rondavel, cuyas paredes tienen forma de cilindro mientras que el tejado tiene forma de cono.

1. Piensa en otros edificios que conozcas que tengan alguna de las formas que se citan en el texto.
2. ¿Sabes en qué consiste el sistema IMAX?
3. Busca el significado de cúpula
4. Busca en Internet la foto de un rondavel

LOS VIAJES DE GULLIVER

La obra “Los viajes de Gulliver” de J.Swift nos permite comprobar cómo aumentan personas y objetos en dos y tres dimensiones. Cuando Gulliver visitó el país de Liliput, donde todas las dimensiones eran 12 veces menores, se enfrentó con las siguientes situaciones:

- Para prepararle un lecho, los liliputienses necesitaron casi 150 de sus colchones (al ser una superficie, los colchones eran $12 \times 12 = 144$ veces más pequeños). Por eso también para hacerle un traje, necesitaban 144 veces más tela que para un liliputiense.
- Las vacas eran tan menudas que Gulliver se las podía meter en el bolsillo y es que una vaca real equivale a $12 \times 12 \times 12 = 1728$ vacas de Liliput. Por eso también pasaba mucha sed, porque cuando pedía algo de beber y le traían uno de sus barriles, para Gulliver eran del tamaño de dedales

EL RETO

En una promoción, una marca de espuma de afeitar regala 50 ml de producto en cada envase, que es de forma cilíndrica. Si quiere resaltar en el exterior del envase la parte que regala con una banda de otro color, calcula que altura debe tener dicha banda si el diámetro de la base del envase mide 5 cm.

ANAMORFOSIS

Las anamorfosis son imágenes deformadas que sólo pueden verse correctamente reflejadas en un cono o un cilindro.



UNIDAD 12. FUNCIONES I

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES Y CARACTERÍSTICAS

1. Representa la gráfica tiempo-distancia recorrida por Julián desde que sale de casa hasta que llega al instituto: “Julián sale de su casa a las 7:40 horas para ir al instituto. Primero camina unos 200 metros hasta una plaza en la que espera a un amigo. Le espera durante 3 minutos y se van los dos a la parada del autobús que pasa a las 8:00 horas y está a unos 300 metros de la plaza. El autobús recorre 5 kilómetros hasta el siguiente pueblo en el que recoge a más alumnos. Después recorren 8 kilómetros hasta llegar al instituto, al que llegan 5 minutos antes de empezar las clases”. Indica cuáles son la variable dependiente e independiente y las escalas correspondientes.

2. Expresa mediante un texto y una tabla las siguientes funciones:

a) $y = 3x - 7$	c) $y = \frac{1}{x}$
b) $y = -x$	d) $y = (x + 5)^2$

3. Dada una función que asocia a cada número su doble menos 4:

- a) Escribe la fórmula y haz una tabla de valores.
- b) ¿Cuál es la imagen de 5 ó $f(5)$ y $f(-2)$?
- c) ¿Cuál es el origen de 2? ¿y de 3?

4. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$a. f(x) = \frac{2x-2}{2x+3} \quad b. f(x) = \frac{4x}{2x^2-x} \quad c. f(x) = \sqrt{x-6} \quad d. f(x) = \sqrt{x+4}$$

5. Empezamos a calentar un litro de agua que tiene una temperatura inicial de 12° C, lo llevamos a ebullición, lo mantenemos así durante 5 minutos y luego lo dejamos enfriar hasta que vuelve a alcanzar la temperatura ambiente, 20° C. Representa una gráfica que se ajuste al enunciado anterior con las variables tiempo-temperatura, procura que sea real, por ejemplo es imposible que se enfríe en 2 minutos.

6. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$a. f(x) = \frac{3}{2x+4} \quad b. f(x) = \sqrt{x-3} \quad c. f(x) = \frac{1}{x^2-3x-10} \quad d. f(x) = \sqrt{5x+10}$$

7. Dos compañías de teléfono ofrecen las siguientes tarifas. **Compañía 1:** El establecimiento de llamada es 0,4 € más 10 céntimos por minutos (tarificación por segundos). **Compañía 2:** El establecimiento de llamada y el primer minuto son 50 céntimos y cada minuto que pasa 5 céntimos más (tarificación por minutos)

- a) Representa las dos funciones.
- b) Dominio y recorrido de cada una.
- c) Estudia la continuidad en cada función.

8. Marcos quiere vallar un recinto del patio de su casa. Tiene 40 metros para vallarlo y solo vallará tres lados, puesto que va a aprovechar una pared.

a) Completa la tabla:

Longitud	30	25	20	15	10
Anchura					

b) Considera a la longitud la variable independiente, x , y a la anchura la variable dependiente, y . ¿Cómo se relacionan las variables? ¿Cuál sería la fórmula de la función?

c) Representa gráficamente, ¿tiene sentido unir los puntos? ¿por qué sí o no?

d) Calcula el dominio y el recorrido de la función.

9. Un gimnasio ofrece dos formas de pago: una cuota fija al mes de 24 € o una cuota fija al mes de 8 € más 2 € por cada día que vaya.

a) ¿A cuál te apuntarías? ¿De qué dependería?

b) Representa gráficamente las dos funciones. ¿Son continuas o discontinuas?

c) Dominio y Recorrido de las dos funciones.

d) ¿Hay algún punto común para las dos funciones? ¿Qué representa ese punto y cómo interpretas esa coincidencia?

e) Estudia el crecimiento, decrecimiento, simetría y periodicidad de las dos funciones.

10. Representa gráficamente las funciones con las características que se dan.

a) Tiene forma de curva y es continua.

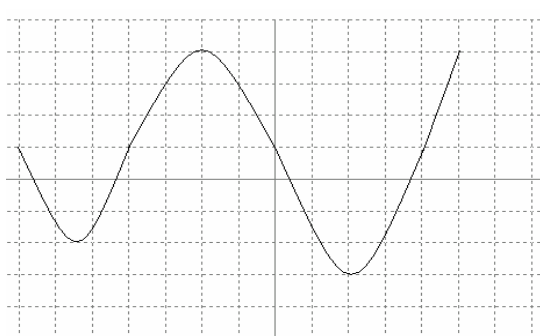
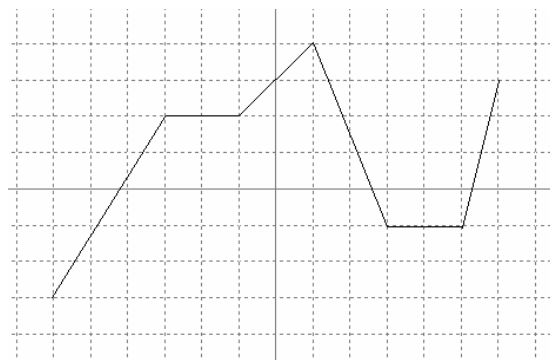
$Dom f(x) = \{\text{todos los números de } -7 \text{ a } 3\}$ $Im f(x) = \{\text{todos los números de } -4 \text{ a } 3\}$ Máximos: $(-4, 3)$; $(2, 2)$. Mínimos: $(0, -4)$; $(-7, -2)$; $(3, 0)$. Puntos de corte con ejes: $(1, 0)$; $(-2, 0)$; $(-6, 0)$.

b) Tiene forma de recta y es continua.

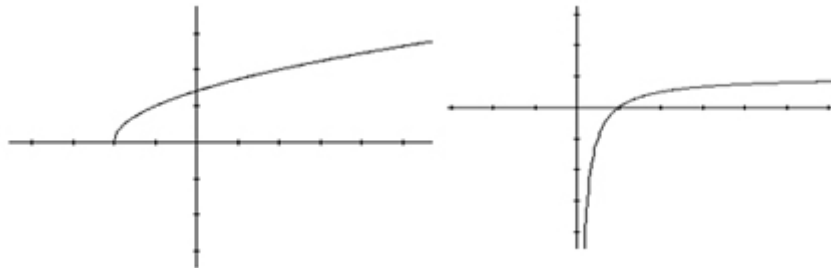
$Dom f(x) = \{\text{todos los números de } -4 \text{ a } 5\}$ $Im f(x) = \{\text{todos los números de } 0 \text{ a } 2\}$ Máximo $(1, 2)$. Puntos de corte con los ejes: $(-1, 0)$; $(2, 0)$. Es periódica de periodo 3.

c.) A vista de las gráficas, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

11. Estudia el crecimiento y decrecimiento, extremos y puntos de corte con los ejes para las siguientes funciones y calcula en la 1ª la $TV[-1, 1]$ y en la 2ª $TV[-2, -1]$.

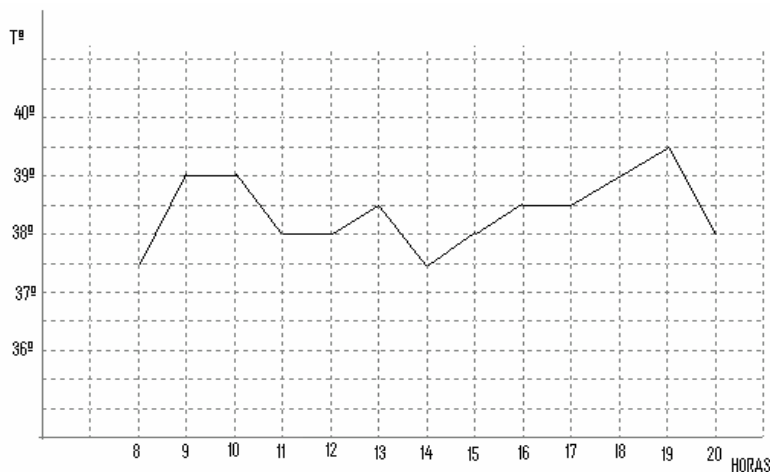


12. Halla el dominio y recorrido de las siguientes funciones:



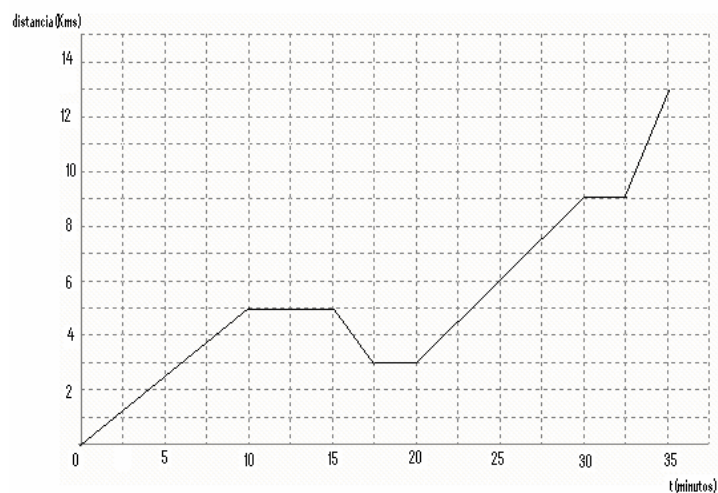
ESTUDIO DE LAS FUNCIONES A PARTIR DE SU GRÁFICA

13. Lidia tiene gripe, en la gráfica se observa la variación de su temperatura a lo largo del tiempo:



- Tasa de variación entre las 8 y las 10 horas y entre las 13 y 14 horas.
- Tramos de crecimiento y decrecimiento de la fiebre.
- Extremos de la función.
- ¿A qué hora tiene la temperatura máxima? ¿y la mínima?

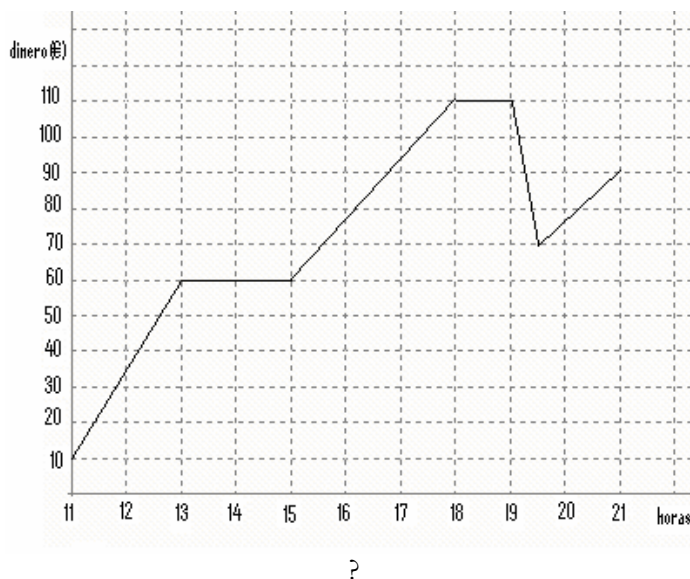
14. Observa la gráfica que relaciona el tiempo y la distancia que recorre la ruta de un autobús escolar en una ciudad todas las mañanas de la semana.



- Dominio y recorrido.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento ¿Qué significa el tramo en el que la función es decreciente?
- ¿Cuánto tiempo permanece parado en la ruta? ¿Cuántos kilómetros recorre entre la 2ª y la 3ª parada?
- ¿Es una función periódica? Razona la respuesta, en caso afirmativo, ¿cuál es el periodo?

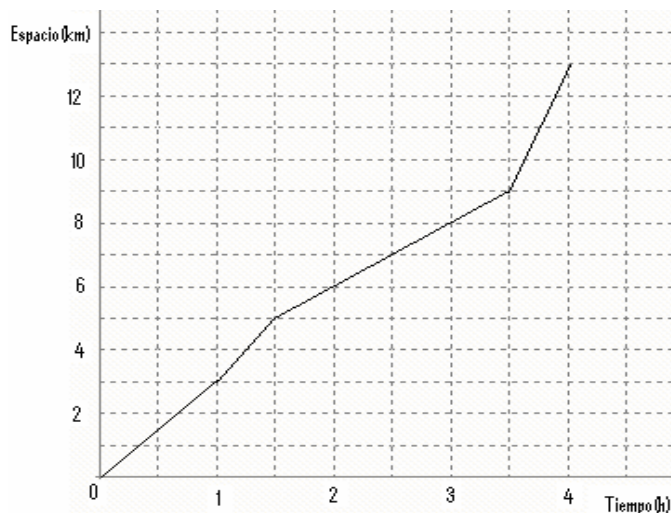
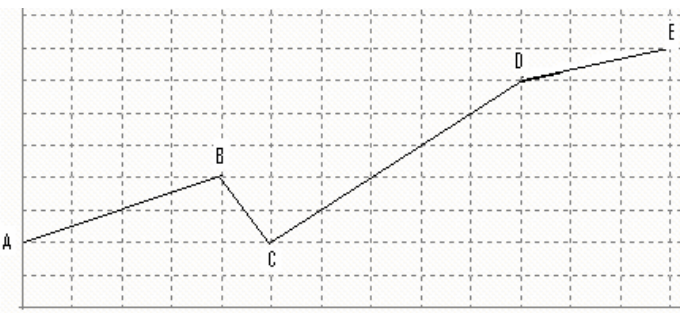
15. La siguiente gráfica representa el dinero que recauda una peluquería a lo largo de un día.

- ¿Cuántas ganancias tiene en un día?
- ¿En qué tramos no hay recaudación en la peluquería? ¿A qué crees que puede deberse?
- Describe los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- ¿A qué puede deberse que decrezca la recaudación?
- ¿Cuándo tiene la caja la mayor cantidad de dinero?
- ¿Cuál es el horario de la peluquería?



16. La primera gráfica es el perfil de una ruta de montaña que van a hacer unos amigos el fin de semana andando, la segunda representa la gráfica tiempo – espacio del recorrido que hace uno de ellos.

- ¿Cuántos kilómetros recorre? ¿En cuánto tiempo?
- Distancia de A a B y velocidad en ese tramo. (Se supone que las velocidades en cada tramo son constantes).
- ¿En qué tramo lleva menos velocidad y en cuál más? ¿A qué crees que se debe?

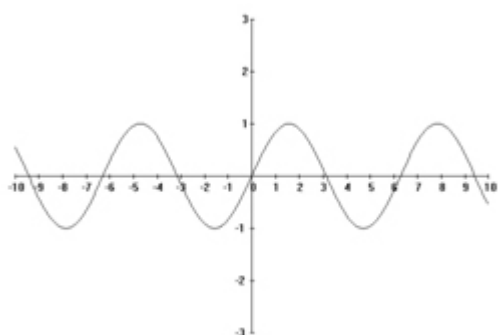


17. Un tren de cercanías hace el siguiente recorrido entre tres ciudades A, B y C: A y B distan 60 km. El tren sale a las 10 de la mañana de la ciudad A con una velocidad constante de 60 km/h, llega a B en una hora y cuarto haciendo una parada de 15 minutos a mitad del recorrido. Descansa otros 15 minutos en B y sale hacia C llegando en 45 minutos y manteniendo la misma velocidad constante. Para en C durante media hora y comienza el recorrido de vuelta a la misma velocidad, cuando llega a B hace una parada de 15 minutos, sale hacia A donde descansa cuarto de hora y vuelve a repetir el recorrido. Representa la función tiempo-espacio y haz el estudio completo.

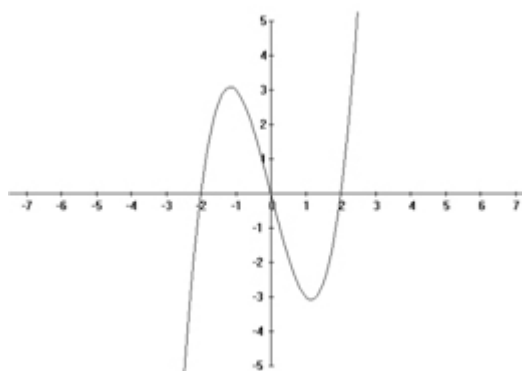
SIMETRÍA DE FUNCIONES

18. Indica la simetría de las siguientes funciones:

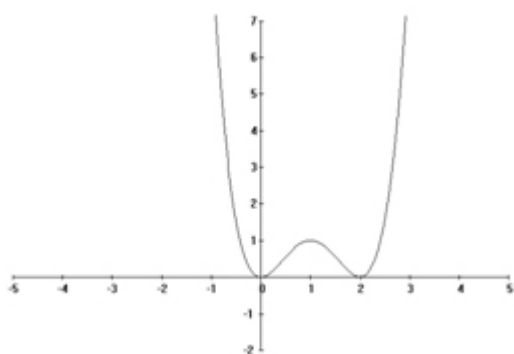
a.



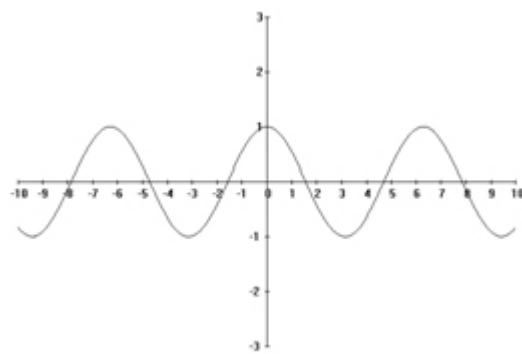
b.



c.



d.



19. Dibuja gráficas de funciones que cumplan las siguientes condiciones:

a. Que sea simétrica respecto del eje y.

c. Que sea simétrica respecto de la recta $x = -3$.

b. Que sea simétrica respecto del origen de coordenadas.

d. Que sea simétrica respecto del punto $(4, -5)$.

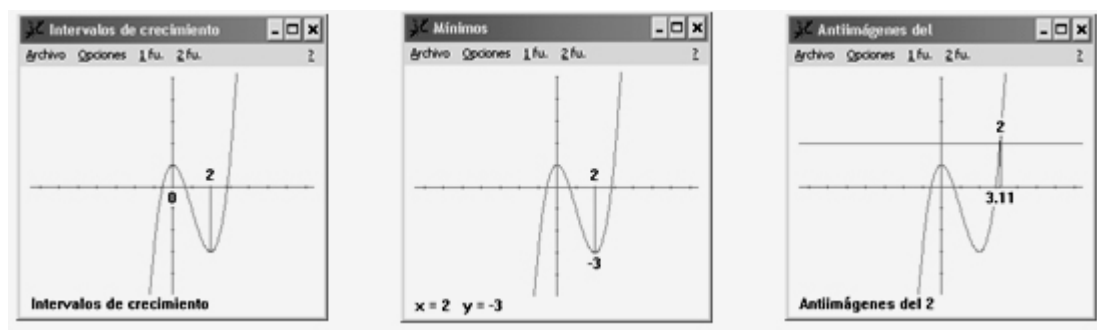
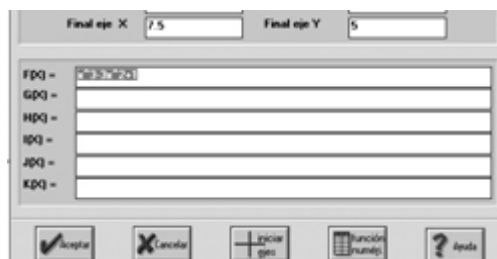
El Rincón Multimedia

PROGRAMA FUNCIONES

El autor de este programa es Jordi Lagares, es de libre distribución y se descarga desde su página <http://www.xtec.es/~jlagares/matemati.htm>

El programa consta básicamente de dos ventanas. En la primera, se introduce la fórmula de la función que queramos representar (hasta 6 a la vez) también se puede seleccionar el tamaño de los ejes, así como el origen y final.

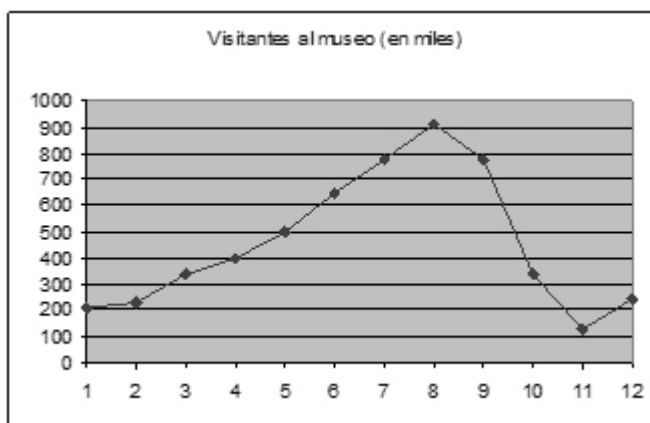
Se ha representado $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, se pulsa Aceptar. Aparece la segunda ventana, con la gráfica de la función. En el menú **1fu** se pueden seleccionar la obtención de imágenes, antiimágenes, intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos,...



FUNCIONES CON EXCEL

El programa Excel puede ser muy útil para representar funciones. Observa por ejemplo la siguiente tabla sobre el número de visitantes (en miles) a un museo durante los distintos meses de un año

meses	visitantes
enero	210
febrero	230
marzo	340
abril	400
mayo	500
junio	650
julio	780
agosto	910
septiembre	780
octubre	340
noviembre	130
diciembre	240

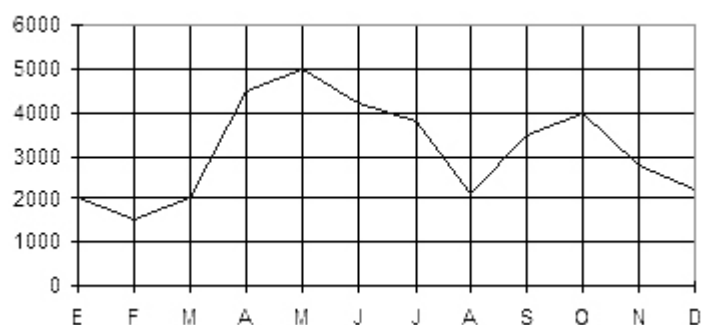


Para representar su gráfica, basta seleccionar las celdas de las dos columnas y pulsar el botón . Se abrirá la ventana del asistente para gráficos en el que elegimos el **tipo XY** y el subtipo con **puntos conectados con líneas**. Pulsando **Finalizar** obtenemos una primera versión del gráfico que podemos mejorar cambiando el título o modificando la escala del eje para que aparezcan valores del 1 al 12.

Aplica lo que sabes

VISITANTES AL MUSEO

La siguiente gráfica representa el número de visitantes de un museo en un año



1. Escribe cuál es el dominio de la función
2. ¿Dónde tiene la función el máximo absoluto?
3. ¿En qué mes toma la función su mínimo valor? ¿Puede haber alguna razón objetiva para que haya habido menos visitantes que en el mes anterior o posterior? ¿Qué otros factores pueden influir?
4. Analizando la gráfica, ¿crees que el museo se encuentra en una localidad turística? Argumenta tu respuesta
5. ¿Entre qué dos meses se produjo un mayor crecimiento? ¿Con qué fenómeno coincide ese aumento del número de visitantes?
6. Halla con la mayor exactitud posible la imagen del mes de Abril

Alrededor de las matemáticas

APARATOS CON GRÁFICAS

Hay muchos aparatos que miden y representan distintos fenómenos mediante el uso de gráficas. Por ejemplo, el **sismógrafo** detecta ondas sísmicas generadas por terremotos o explosiones. Cuando hay un fuerte movimiento de la tierra, este queda registrado en un gráfico gracias a un péndulo o una masa sujeta a un resorte.

El **polígrafo** es un instrumento que registra respuestas fisiológicas como la presión arterial o el ritmo respiratorio. Los detectores de mentiras que vemos normalmente en películas o series de televisión son polígrafos. No es que esos aparatos “detecten mentiras” en sí, sino que su uso se basa en que, si una persona miente, cambian sus respuestas fisiológicas.

Un **electrocardiograma** es la representación gráfica de la actividad de corazón y se mide mediante unos electrodos que se colocan en distintos puntos de la superficie corporal. El electrocardiograma de una persona sana presenta un gráfico estándar y, si se producen cambios en ese trazado, el médico puede determinar si existe algún tipo de problema.

1. Busca el significado de “fisiológico”
2. Piensa en otros aparatos que utilicen gráficos para representar sus resultados.
3. Busca información sobre cuándo se inventaron los aparatos citados en el texto.

EL ORIGEN DE LA FUNCIÓN SALTOS

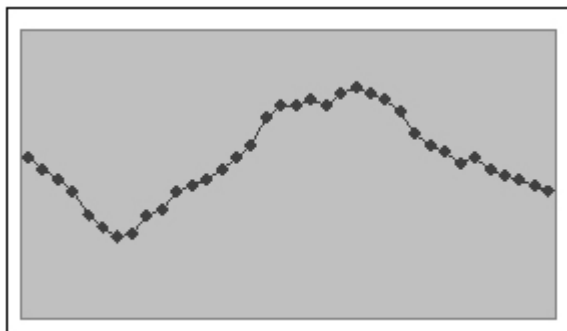
La definición de función tal y como la conocemos hoy en día es un concepto relativamente reciente: fue introducido por el matemático Peter Gustav Dirichlet, discípulo de Gauss, en 1837.



El movimiento de un saltador de longitud o el “vuelo” de un jugador de baloncesto que va a realizar un mate se pueden representar mediante dos tipos de función: una que relaciona la distancia recorrida en horizontal con la altura alcanzada y otra que expresa la altura alcanzada en función del tiempo transcurrido.

EL RETO

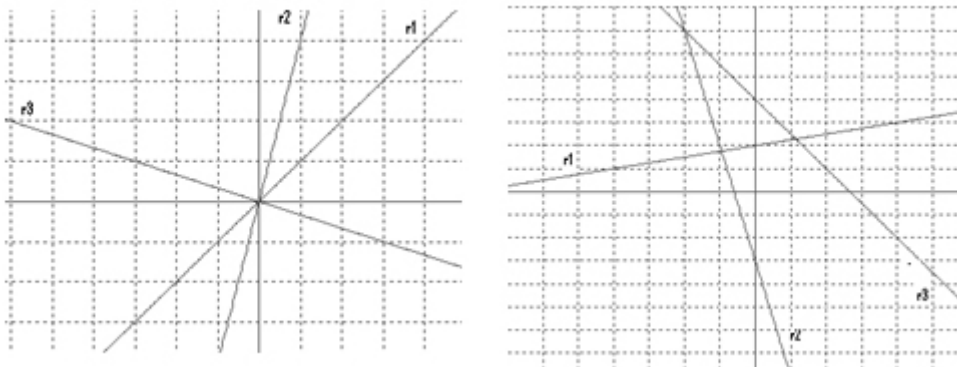
Un amigo ciclista me dijo: “mira, he realizado una gráfica de la etapa que hice ayer en bicicleta. Fue un día duro, porque nada más empezar, tuve que subir una buena cuesta”. ¿Se había equivocado de gráfica?



UNIDAD 13. FUNCIONES II

REPRESENTACIÓN DE LA RECTA Y DETERMINACIÓN DE SUS ECUACIONES

1. Obtén las ecuaciones de las funciones lineales y afines a vista de la gráfica:



2. Representa las siguientes rectas en los ejes cartesianos:

a) $x = \frac{1}{2}$

b) $y = -4$

c) $5y + 1 = 0$

d) $-4x + 6 = 0$

e) Recta que pasa por el punto (2,-5) y es paralela al eje x.

f) Recta que pasa por el punto (0,2) y es paralela al eje y.

3. Averigua la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes rectas y represéntalas en los ejes de coordenadas.

a) $3x - 6 = 0$

c) $2y = -5$

b) $x - 3y = -7$

d) $-5x + 2y = 0$

4. Escribe la ecuación de las siguientes rectas y represéntalas:

a) Que pasa por los puntos $P(-3,2)$ y $Q(6,-5)$.

b) Que pasa por el punto $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ y su pendiente es -1.

c) Que pasa por el punto $(-3,4)$ y es paralela a la recta $y = \frac{1}{2}x + 5$.

d) Que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a $6x - 3y = -12$.

e) Que es paralela al eje x y pasa por el punto $(-1,-2)$.

f) Que es paralela al eje y y pasa por el punto $(3,-5)$.

5. Comprueba si los puntos A (1,2), B(3,-4) y C(-3,-5) están o no alineados.

6. Averigua el valor de b para que el punto $P(\frac{3}{5}, -2)$ pertenezca a la recta $-10x + by = 4$.

7. Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por el origen de coordenadas y por los puntos:

a) (-2,4) b) $(\frac{3}{2}, \frac{-2}{3})$ c) (0,-4) d) $(\frac{-1}{4}, 0)$

8. Halla las ecuaciones de las rectas en la forma $y = mx + n$ de las que conocemos la pendiente y un punto.

a) $m = 6$ $P(-2, -7)$ b) $m = \frac{2}{3}$ $P(0, \frac{1}{2})$ c) $m = 0$ $P(\frac{-3}{2}, \frac{3}{4})$

Transforma las ecuaciones obtenidas a la forma general, es decir, $ax + by = c$.

9. Determina las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos y represéntalas:

a) $(\frac{2}{3}, \frac{-1}{4})$ y $(2, \frac{-1}{4})$ c) (0,-7) y (2,0)
b) (-3,5) y (-2,7) d) $(\frac{-3}{5}, 0)$ y $(\frac{-1}{2}, \frac{6}{5})$

10. Halla la ecuación de las siguientes rectas en forma general:

a) Que tiene pendiente $\frac{-1}{3}$ y ordenada en el origen 4.

b) Que pasa por los puntos $P(-2, -3)$ y $Q(-3, 4)$.

c) Que tiene pendiente 2 y pasa por el punto $P(-3, -4)$.

d) Que es paralela a la recta $y = \frac{1}{2}x + 3$ y pasa por el punto $P(-2, 1)$.

e) Que tiene pendiente 0 y pasa por el punto $P(1, -2)$.

f) Que es paralela al eje Y y que pasa por el punto $Q(0, -4)$.

11. Comprueba si los siguientes puntos son o no de las rectas dadas:

a) $P(1, 3)$ recta : $y = -2x + 5$ b) $Q(\frac{1}{2}, \frac{-7}{2})$ recta : $3x - 5y = 14$

12. a) Calcula b para que la recta $2x + by = 5$ pase por el punto (-1,2).

b) Calcula c para que la recta $y = \frac{4x+c}{7}$ pase por el punto $(\frac{1}{4}, -3)$.

13. Averigua si los tres puntos están alineados, es decir si pertenecen o no a la misma recta:

a) A(-2,0), B(3,2) y C(-1,3).

b) A(-4,-1), B(5,-4) y C(2,-3).

14. Averigua la posición relativa de los siguientes pares de rectas sin representarlas. Después represéntalas e indica su punto de corte en caso que las rectas se corten en un punto.

$$a) \begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ x + 5y = -3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ y = 2 \cdot (x + 1) \end{cases} \quad c) \begin{cases} 3 \cdot (x - 2y) = 9 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

RELACIÓN ENTRE MAGNITUDES

15. Relaciona cada ecuación de la recta con la condición que cumple:

- a) $y = -2x + 7$ 1) Pasa por (1,6) y (4,0)
- b) $y = \frac{1}{2}x - 3$ 2) Es paralela a $y = -2x + 5$ y pasa por (-1,9).
- c) $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 3) Pasa por los puntos (6,0) y (-2,-4).
- d) $y = -2x + 8$ 4) Es paralela a $y = \frac{-1}{2}x - 3$.

16. Un bufete de abogados va a instalarse en un edificio de oficinas. Tienen que pagar una fianza de 3000 € y un alquiler mensual de 1500 €. a) Escribe la fórmula de la función que relaciona meses de alquiler con dinero que pagan y represéntala. b) ¿Cuánto pagarán durante el primer año?

17. El precio de la bajada de bandera de un taxi es de 1,20 € y por cada kilómetro cobra 0,80€.

- a) Haz una tabla de valores, obtén la ecuación que relaciona kilómetros recorridos con precio de la carrera y representa la función.
- b) ¿Cuántos kilómetros he recorrido si el taxista me ha cobrado 5,20 €?

18. En una academia de preparación a oposiciones se cobra 100 € por la matrícula y mensualidades completas de 70 €. La duración del curso es igual a la del curso escolar.

- a) Obtén la ecuación que relaciona precio en función de los meses de clase recibidos.
- b) Represéntala en los ejes de coordenadas. ¿Se pueden unir los puntos? Razona la respuesta.
- c) ¿Cuánto me cobran por 4 meses de clases recibidos?

19. Un vendedor de móviles recibe un sueldo fijo al mes de 900 € y 20 € por cada móvil que vende.

- a) Haz una tabla de los posibles sueldos mensuales en función de los móviles vendidos.
- b) Obtén la fórmula que relaciona móviles vendidos con sueldo del vendedor.
- c) Represéntala en los ejes de coordenadas. Razona si los puntos se pueden unir o no.

20. Una ONG ha organizado una fiesta para recaudar dinero. Por la entrada se pagan 20 € y se venden papeletas para el sorteo de un viaje de un fin de semana para dos personas. Elena se ha gastado 35 € en la entrada y en 5 papeletas de la rifa. Establece la función que relaciona precio-papeletas y represéntala.

El Rincón Multimedia

FUNCIONES CON DERIVE

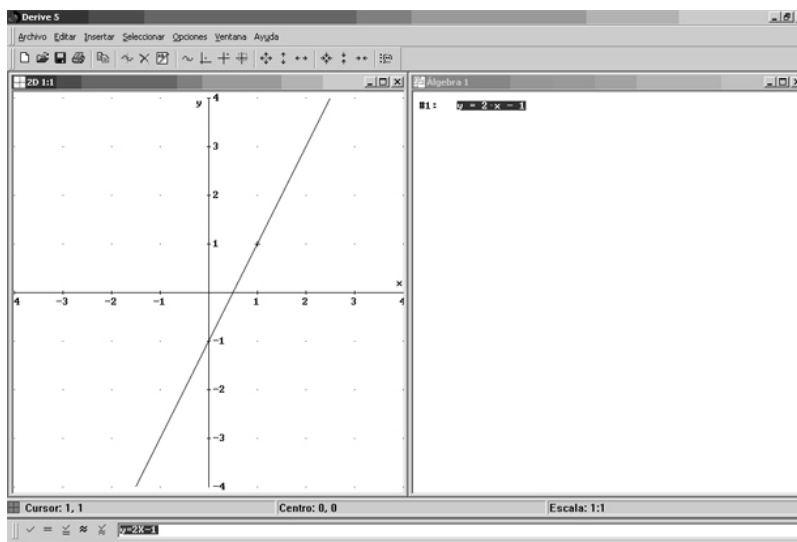
Vamos a representar funciones de la forma $y = ax + b$, cuya gráfica sabemos que va a ser una recta. Para ello, iniciamos el programa y activamos la ventana gráfica: **Ventana-Nueva ventana 2D**. Aparece una nueva ventana con unos ejes de coordenadas divididos en varias unidades. Para trabajar con las 2 ventanas a la vez (*Álgebra* – donde insertaremos las fórmulas y operaciones- y *Gráfica*), vamos a **Ventana-Mosaico Vertical**.

Cada ventana lleva asociado un menú distinto (compruébalo pinchando en cualquier punto dentro de cada ventana para activarlas). Verás que al ventana activada tiene el marco superior color azul, y la desactivada, gris.

En la **Entrada de Expresiones** de la ventana *Álgebra*, escribe $y = 2x - 1$. Pulsa **Intro**.

Activa la ventana Gráfica.

Pulsa de nuevo el botón . Aparecerá la gráfica de una recta de pendiente 2 y ordenada en el origen -1 (punto de corte con el eje vertical).



*Da valores a los coeficientes a y b para comprobar cómo si a es positiva es una recta creciente, si es negativa, decrece...Y cómo cambia el punto de corte con el eje de ordenadas para los distintos valores de b .

PENDIENTE DE UNA RECTA CON EXCEL

Con el programa EXCEL es fácil calcular la pendiente de una recta a partir de las coordenadas de dos de sus puntos.

Imagina que quieres calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-1,4)$ y $(1,-2)$. Para ello escribimos los valores de x en la columna A y los de y en la columna B, tal y como aparece en la imagen.

	A	B
1	valores x	valores y
2	-1	4
3	1	-2
4	pendiente	-3
5		

Después, por ejemplo en la celda B4, escribimos la formula:

=PENDIENTE(B2:B3;A2:A3)

(las dos primeras celdas son las que contienen los valores de las coordenadas y y las siguientes las que contienen los valores de las coordenadas x). Y así obtenemos el valor de la pendiente de la recta.

Aplica lo que sabes

EL RECIBO DE LA LUZ

				Cálculos de facturación	
nº contador	lectura anterior	lectura actual	consumo	Por potencia	
234564	4964	5414	450	3,30 kw x 2 meses x 1,65 € = 10,89 €	
				Por consumo	
				450 kwh x 0,095 € = 42,75 €	
				Impuestos y alquiler de equipo	
				4,24 €	
				Total facturación	
				57,88 €	

La imagen superior refleja la información (algo simplificada) de un recibo de la luz. Este recibo llega cada dos meses a las viviendas y recoge una serie de gastos fijos así como otros que dependen de la electricidad que hemos consumido en esos dos meses.

La potencia contratada es, como su nombre indica, la potencia que hemos contratado para nuestro hogar. En nuestro caso es de 3,30 kw. Eso quiere decir que la suma de las potencias de todos los aparatos que tengamos conectados a la vez no puede superar los 3,30 kw. (o 3300 w) o saltará el automático. La electricidad consumida se expresa en kwh., cada uno de los cuáles nos cuesta 0,095€

1. ¿A cuánto asciende el total de gastos fijos del recibo?
2. Escribe la fórmula que relaciona el consumo (expresado en kwh.) con el precio final de la factura. ¿Qué tipo de función es?
3. Elabora una tabla de distintos valores de consumo (por ejemplo entre 500 y 2000 kwh.). Representa la función con la escala que consideres más adecuada y comprueba que se trata de una recta.
4. ¿Cuál es el valor de la ordenada en el origen? ¿Qué representa en relación al recibo?
5. Imagina que el siguiente recibo a este tiene un importe de 79,73 €. ¿Cuál ha sido el consumo eléctrico en estos dos nuevos meses? ¿A qué crees que puede deberse tanta diferencia entre dos facturas de la luz seguidas?
6. ¿Cuál habría sido el importe total de la última factura con ese mismo consumo si tuviéramos sólo 2,2 kw. de potencia contratada? ¿Cómo se modificaría entonces la ecuación de la función?

Alrededor de las matemáticas

CRECIMIENTO LINEAL Y CRECIMIENTO EXPONENCIAL

Cuando estudiamos la evolución de un fenómeno o de una cierta variable, dos de las formas más habituales de crecimiento son:

- El **crecimiento lineal o aritmético**: el aumento es constante, con lo que cada cantidad es el resultado de añadir a la anterior una cantidad fija.
- El **crecimiento exponencial o geométrico**: si el aumento es proporcional a la cantidad actual, es decir, cada cantidad es el resultado de multiplicar la anterior por una cantidad constante.

Lógicamente, el crecimiento exponencial es mucho más rápido. Supón que te ofrecen pagarte medio euro el primer día de una semana y, a partir de ese día, aumentarte el pago diario 2 € o bien te proponen doblarte cada día el pago del anterior. Durante los primeros días, dudarías, pero a partir de la segunda semana la diferencia a favor del segundo método sería abrumadora.

Otro ejemplo llamativo lo facilitó el economista inglés Thomas Malthus en el siglo XIX. Según su hipótesis, la población humana crece de forma exponencial mientras que la producción de alimentos lo hace de forma lineal por lo que llegaría un momento en que la producción de alimentos no sería suficiente. Ahora bien, en una visión poco optimista, también pensaba que las guerras y enfermedades ralentizarían ese crecimiento de población.

1. Piensa en otros fenómenos que tengan un crecimiento lineal o exponencial.
2. ¿Cómo crece el dinero acumulado en el interés simple? ¿Y en el interés compuesto?
3. En el ejemplo del pago diario, ¿cuánto cobrarías por el segundo método el décimo día?
4. Investiga quién llamó a la Economía la “ciencia lúgubre” a partir de las teorías de Malthus.

EL RETO

Imagina que tu familia ya ha elegido la marca y el modelo de coche que queréis y sólo os queda decidir si optar por la versión diesel o por la de gasolina. Para ello, el concesionario os presenta la siguiente tabla con el precio de venta del vehículo y el coste por kilómetro del vehículo, que incluye combustible, reparaciones, impuestos, etc

	diesel	gasolina
precio venta	17.500 €	15.050 €
coste/km	0,278 €	0,292 €

Teniendo en cuenta que esperaréis disfrutar del coche unos 7 años, ¿a partir de cuántos kilómetros anuales resulta rentable la versión diesel? (Indicación: para cada modelo escribe la ecuación de la función que relacione los kilómetros recorridos al año con el coste anual del coche, incluida la parte proporcional del precio de venta para ese año)

COORDENADAS CARTESIANAS

El sistema de coordenadas que utilizamos para representar los puntos se denomina de **coordenadas cartesianas** ya que fue **René Descartes** quien las introdujo en el S.XVII. Con ellas, Descartes pretendía relacionar la Geometría con el Álgebra para facilitar la resolución de problemas geométricos

LA PENDIENTE



La idea de pendiente se utiliza para expresar la inclinación de una cuesta en la carretera. Así, para advertir de la presencia de una subida pronunciada se utilizan señales en las que el grado de inclinación se expresa en porcentaje. Una cuesta con un 10% de inclinación equivale a una recta de pendiente $m = 0,1$

UNIDAD 14. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

AGRUPACIÓN DE DATOS: TABLAS Y GRÁFICAS

1. Clasifica las siguientes variables, distinguiendo entre discretas y continuas las cuantitativas:

- a) La edad.
- b) Área de un listón de madera.
- c) Color de ojos.
- d) La talla de ropa.
- e) Longitud de un tornillo.
- f) El lugar de nacimiento.

2. Establece de qué tipo son las siguientes variables e inventa para ellas una posible población:

- a) Sueldo mensual. b) Altura de puertas. c) Número de hermanos. d) Color de pelo.

3. Preguntando la talla de ropa de las alumnas en tres clases de 3º ESO hemos obtenido los siguientes datos:

38; 40; 36; 40; 42; 40; 38; 38; 36; 40; 44; 42; 36; 40; 44; 42; 40; 38; 42; 44; 42; 38; 40; 42; 40; 36; 40.

- Haz una tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentajes con los datos del ejercicio.
- ¿Qué tipo de variable es la talla de ropa?
- Representa la tabla de frecuencias en un diagrama de barras y en un polígono de frecuencias.

4. Las estaturas (en cm) de 36 alumnos y alumnas de 3º ESO elegidos de forma aleatoria son:

165; 162; 173; 158; 159; 174; 177; 160; 155; 153; 161; 156; 174; 170; 166; 168; 154; 163; 160; 159; 167; 172; 165; 162; 161; 168; 163; 170; 158; 157; 173; 160; 172; 157; 162; 166.

- Haz una tabla de frecuencias con los datos agrupándolos en 6 intervalos.
- ¿Qué tipo de variable es la altura?
- Representa los datos en la gráfica más adecuada. Representa también un polígono de frecuencias y diagrama de sectores.

5. Cinco amigos han puesto en común las pulseras que llevan haciendo durante el verano para venderlas conjuntamente en un mercadillo. El número de pulseras que ha hecho cada uno ha sido: 32, 45, 26, 50 y 28.

- a) Representa esta información en un diagrama de barras, polígono de frecuencias y diagrama de sectores.
- b) ¿Cuál es la variable objeto de estudio y de qué tipo es? ¿Y el tamaño de la muestra?
- c) Han vendido todas las pulseras por un valor de 217,2 €. ¿Cuánto dinero le debe corresponder a cada uno?

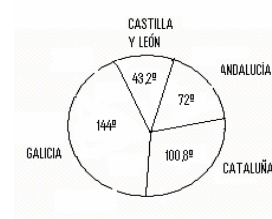
6. En la tabla se muestra el sueldo mensual de 40 jóvenes en una determinada población:

SUELDO MENSUAL DE 40 PERSONAS (en €)
625, 1230, 615, 1065, 1200, 520, 1412, 765, 1006, 567, 1387, 926, 845, 1400, 800, 630, 1345, 765, 987, 900, 565, 736, 975, 1260, 589, 1135, 895, 1420, 782, 653, 1020, 800, 820, 607, 1240, 990, 567, 728, 1008, 785.

- a) Haz una tabla de frecuencias con los datos agrupándolos en 6 intervalos.
- b) Representa los datos en un histograma, polígono de frecuencias y en un diagrama de sectores.

7. En el siguiente diagrama de sectores se muestra para cuatro Comunidades Autónomas los incendios provocados durante el pasado verano.

- a) Establece la tabla de frecuencias, frecuencias relativas y tantos por ciento para la variable: “Incendios provocados en CCAA” a partir del diagrama de sectores.
- b) Si el número total de incendios provocados en las cuatro Comunidades ha sido de 750, ¿cuántos han tenido lugar en Galicia? ¿y en Castilla y León?



8. Se ha realizado una encuesta en una población para evaluar la actuación de la comisión de festejos. Los resultados aparecen reflejados en la tabla de la derecha:

RESPUESTAS	%
EXCELENTE	42
BUENA	18,8
ACEPTABLE	12,4
MALA	14,8
NS/NC	12

- Si sabemos que 37 personas respondieron “MALA”, ¿cuál es el número total de encuestados, es decir el tamaño muestral?
- Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas.
- ¿Cuál y de qué tipo es la variable? Representa las frecuencias absolutas en un diagrama de barras y los porcentajes en uno de sectores.

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS: MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y DE DISPERSIÓN

9. El número de coches en propiedad que han tenido un grupo de personas mayores de 50 años aparece en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	3	6	13	22	37	16

- Calcula la media y desviación típica de la distribución.
- Halla la mediana sin necesidad de colocar todos los datos ordenados y explica cómo lo has hecho.
- ¿A cuántas personas se les ha preguntado? ¿Cuántos coches han tenido entre todos?

10. Para la repoblación de un pinar se han plantado 40 árboles. Al cabo de 5 años se han medido obteniendo las siguientes alturas en metros:

ALTURA PINOS A LOS 5 AÑOS (en metros)
2.1; 1.9; 3.1; 2; 1.8; 2.5; 1.8; 2.9; 1.7; 3; 1.7; 2.5; 3.9; 3.4; 2.6; 2.7; 2.1; 3.2; 1.8; 2; 3.7; 2.3; 2.6; 3.2; 3.6; 2.9; 2.4; 3.3; 2.5; 1.9; 1.2; 3.8; 3.5; 2.6; 2.4; 2.2; 1.7; 1.9; 2.1; 2.2.

- Agrupar los datos en 6 intervalos y calcular la altura media de la replantación de pinos después de 5 años utilizando la marca de clase.
- Halla el rango, la desviación media y la desviación típica.
- Explica el significado de la desviación típica en este ejercicio.

11. EL gasto aproximado en la compra semanal de un número de personas sondeadas a la salida de un supermercado es:

125, 235, 85, 50, 210, 75, 200, 140, 160, 220, 80, 55, 150, 100, 190, 165, 70, 180, 45, 120.

- Determina la media aritmética, mediana y cuartiles.
- Halla el recorrido, la desviación media y la desviación típica.
- ¿A qué crees que puede deberse la diferencia entre los datos?

12. La altura de un conjunto de recién nacidos aparece en la siguiente tabla:

x_i	f_i
(40,43]	5
(43,46]	7
(46,49]	10
(49,52]	16
(52,55]	6
(55,58]	4

- Halla la media aritmética.
- Calcula la desviación media y la desviación típica.
- Representa los datos en una gráfica adecuada.

13. En la siguiente tabla aparecen los móviles vendidos por una empresa de telefonía durante un mes:

26, 34, 18, 26, 18, 20, 12, 27, 15, 20, 12, 27, 18, 26, 20, 15, 15, 26, 12, 20, 20, 15.

- ¿Cuál es la variable estudiada y de qué tipo es? ¿Y el tamaño muestral?
- Haz una tabla de frecuencias y representa en una gráfica adecuada.
- Determina la media, mediana y moda de la distribución.
- Halla el rango, la desviación media y la desviación típica.

COEFICIENTE DE VARIACIÓN

14. Tenemos los móviles vendidos por comerciales en otra empresa de telefonía diferente a la del ejercicio 13:

43, 8, 12, 8, 17, 43, 17, 43, 43, 8, 17, 28, 35, 8, 43, 35, 28, 17, 43, 12, 8, 35, 43, 17, 8, 43.

a) Haz una tabla de frecuencias y representa en una gráfica adecuada.

b) Determina el coeficiente de variación con los datos del ejercicio 13 y con estos y compara la dispersión entre las dos distribuciones.

15. Preguntando a un conjunto de alumnos de 3º ESO y a alguno de sus abuelos por “el número de hermanos que tienen” hemos obtenido las siguientes respuestas que aparecen en la tabla:

x_i	f_i (abuelos)	f_i (nietos)
0	0	8
1	3	16
2	5	5
3	6	1
4	7	0
5	9	0

a) ¿Qué valores toma la variable y de qué tipo es? ¿Cuál es el tamaño muestral?

b) Calcula la media y desviación típica de cada distribución y haz un estudio comparativo.

c) Calcula el coeficiente de variación de cada una y establece en cuál es mayor la variación o dispersión de los datos. Explica a qué crees que se debe.

16. En la siguiente tabla se refleja el precio medio y la desviación típica de la vivienda en dos ciudades en los últimos 6 años (en €/m²):

	Ciudad A	Ciudad B
Precio de la vivienda (en €/m ²)	$\bar{x} = 840 \text{ €/m}^2$ $\sigma = 118 \text{ €/m}^2$	$\bar{x} = 1475 \text{ €/m}^2$ $\sigma = 823 \text{ €/m}^2$

Haz un estudio comparativo entre las dos ciudades. Estudia también la dispersión de los datos. ¿Qué indica que el coeficiente de variación sea diferente?

17. En la siguiente tabla se refleja el índice medio de natalidad por familia en dos países diferentes:

	País A	País B
Índice medio de natalidad	$\bar{x} = 3,2$ $\sigma = 1,7$	$\bar{x} = 1,4$ $\sigma = 0,09$

Haz un estudio comparativo entre los dos países. Calcula el coeficiente de variación e indica en qué país es mayor la variación de datos y su significado.

18. Queremos comparar el número de áreas suspensas para septiembre en tres clases de 3º ESO. Tenemos la media y desviación de cada una:

CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3
$\bar{x} = 3$; $\sigma = 1,25$	$\bar{x} = 4$; $\sigma = 3,5$	$\bar{x} = 5$; $\sigma = 3$

Calcula el coeficiente de variación y explica la diferencia entre ellos.

19. El dinero mensual que pagan de hipoteca ocho familias es: 725, 436, 820, 638, 904, 582, 703 y 567 €.

a) Calcula la media aritmética, mediana, rango, desviación típica y coeficiente de variación.

b) Sumamos 20 € a cada hipoteca. Vuelve a calcular los parámetros del apartado a) con los nuevos datos. Compara los resultados obtenidos en los dos apartados y justifica lo sucedido.

¿Qué sucede si restamos 20 €?

El Rincón Multimedia

ESTADÍSTICA CON EXCEL

Se ha realizado una encuesta a 50 personas sobre hábitos alimenticios y se les ha preguntado cuántas veces toman fruta o verdura al día. Se supone que lo ideal sería unas 5 raciones diarias. Los datos obtenidos los introducimos tal y como se han ido recogiendo en el **rango A2:E11**.

Recuerda que para combinar celdas y escribir el título, poner bordes a las celdas, sombrearlas... has de ir a la opción **Formato-Celdas** y seleccionar la pestaña correspondiente.

	A	B	C	D	E
1	DATOS RECOGIDOS				
2	2	1	4	1	2
3	4	5	2	1	2
4	5	2	4	1	1
5	1	3	4	0	2
6	1	0	1	0	0
7	1	2	3	4	4
8	3	2	3	5	2
9	4	2	5	3	2
10	4	2	2	2	3
11	5	6	2	1	0
12					

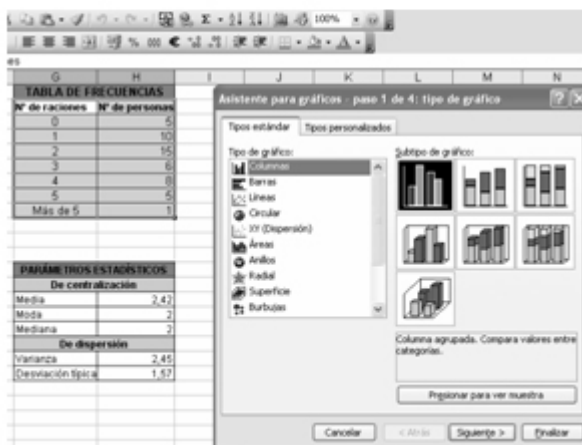
Diseña la tabla de frecuencias y en H3 usa la función **CONTAR.SI()** para efectuar el recuento de las personas que no toman nada de fruta o verdura. Escribe: **CONTAR.SI(\$A\$2:\$E\$11;G3)**. Se señala el rango y el valor a contar (en este caso, indica la celda donde está el valor). El símbolo del dólar (\$) se utiliza para fijar el rango, ya que se va a hacer referencia al mismo rango a continuación.

=CONTAR.SI(\$A\$2:\$E\$11;">5")		
F	G	H
	TABLA DE FRECUENCIAS	
	Nº de raciones	Nº de personas
	0	5
	1	10
	2	15
	3	6
	4	8
	5	5
	Más de 5	1

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS	
De centralización	
Media	2,42
Moda	2
Mediana	2
De dispersión	
Varianza	2,45
Desviación típica	1,57

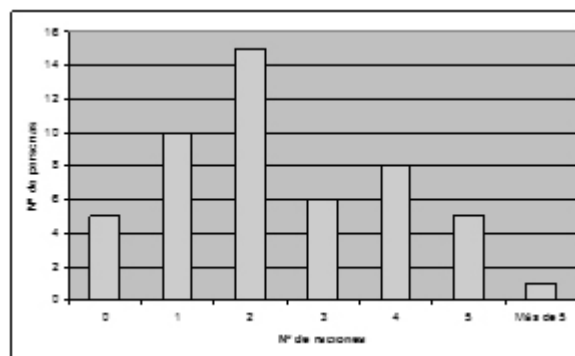
Se selecciona H3 y, utilizando el **controlador de relleno**, copia su fórmula en el rango H4:H7. (También con **Copiar y Pegar**). En la celda H8, la condición cambia, pues hay que incluir aquellos que toman más de 5 piezas de fruta: 6, 7...Escribe por tanto: **=CONTAR.SI(\$A\$2:\$E\$11;">5")**. Aparecerá un 1 en este caso.

En H15 calcula la media, con la función **PROMEDIO()**. Tan sólo indica el rango dentro del paréntesis y obtendrás el resultado. Escribe **=PROMEDIO(A2:E11)**. Aparecerá 2,42 raciones de fruta o verdura. Repite el procedimiento para el resto de parámetros, insertando las fórmulas **MODA()**, **MEDIANA()**, **VAR()** y **DESVEST()**.



Para representar gráficamente la información obtenida en la tabla de frecuencias, usarás el **Asistente para gráficos**. En 4 pasos, seleccionando previamente el rango **G2:H9**, obtendrás el gráfico deseado.

En el primer paso, selecciona el tipo y subtipo de gráfico. En este caso, Columnas agrupadas en dos dimensiones. Pulsa **siguiente**. En el segundo paso, te pide que escribas de qué rango de datos va a constar el gráfico. Ya lo has hecho antes, al seleccionar **G2:H9**. En el tercer paso, puedes hacer que desaparezca la **Leyenda**, insertar el **título en los ejes X e Y** que quieras... Por último, señala que el gráfico generado va a ir en la misma hoja del documento. Obtendrás algo parecido al de la derecha.



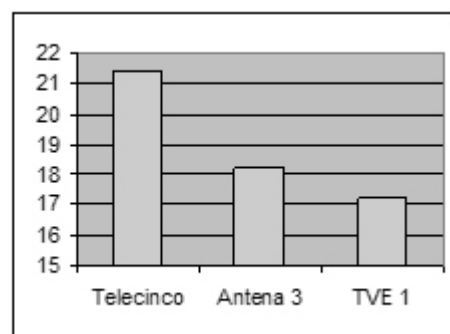
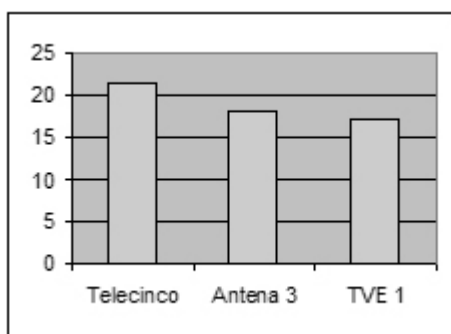
Aplica lo que sabes

LAS AUDIENCIAS DEL MUNDIAL

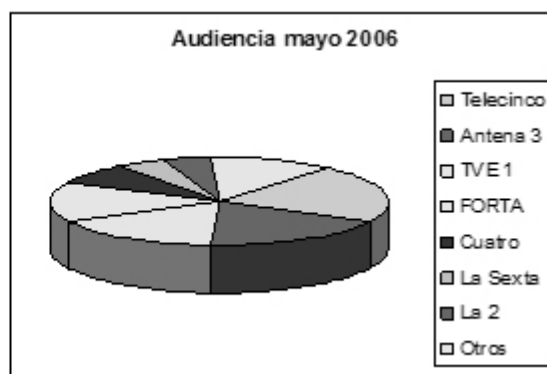
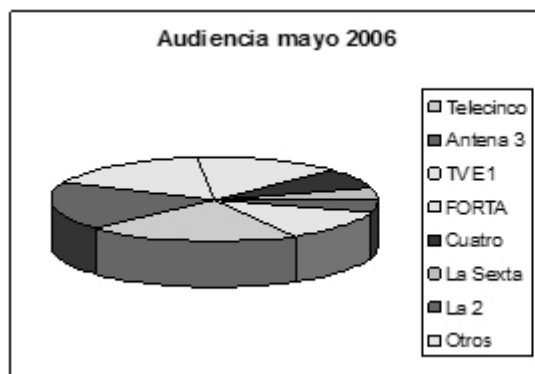
En junio de 2006 se celebró en Alemania el Mundial de Fútbol. En España los derechos de retransmisión de los partidos en abierto los compraron dos cadenas de televisión de reciente creación. La tabla de la derecha recoge los datos de porcentaje de audiencia de los distintos canales de televisión en el mes de junio, cuando se jugó la mayor parte del mundial, y en el mes de mayo.

	may-06	jun-06	Diferencia
Telecinco	22,4	21,4	-1,0
Antena 3	19,9	18,2	-1,7
TVE 1	18,7	17,2	-1,5
FORTA	15,4	14,2	-1,2
Cuatro	6,2	7,5	1,3
La Sexta	0,6	5,1	4,5
La 2	4,8	4,4	-0,4

1. ¿Cuánto suman los porcentajes de audiencia en cualquiera de los meses? ¿Por qué crees que no suman el 100%?
2. Elabora un gráfico de barras con la columna de datos de las diferencias entre mayo y junio. Analiza los datos y saca alguna conclusión sobre la relación entre la celebración del mundial y la audiencia de las cadenas.
3. Observa estos dos gráficos. Ambos recogen los datos de audiencia de las tres principales cadenas en el mes de junio y, sin embargo, su aspecto es muy diferente. ¿A qué es debido? ¿A quién beneficia el enfoque del segundo gráfico?



4. Estos dos diagramas de sectores en tres dimensiones están realizados con los mismos datos (de mayo de 2006) pero ambos presentan en primer plano datos de distintas cadenas. Si fueras directivo de Tele 5, ¿con cuál te quedarías? ¿Y si fueras directivo de Antena 3?



Alrededor de las matemáticas

MEDIAS Y MEDIAS

La media aritmética, que ya se conocía en tiempos de Pitágoras, no es la única media que existe en estadística sino que existen otras que se obtienen a partir de cálculos diferentes.

Si la media aritmética en el fondo sólo utiliza la suma y la diferencia (b es la media aritmética de a y c si $a - b = b - c$), la **media geométrica** utiliza el producto y la división. Así, se dice que b es la media geométrica de a y c si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ o, lo que es lo mismo, $b^2 = a \cdot c$. La media geométrica se utiliza por ejemplo en problemas de tipo de interés, inflación, etc...

Por otro lado, la **media armónica** de dos números a y c es el valor $b = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} = \frac{2ac}{a+c}$ y se utiliza en

problemas de velocidades y, en general, cuando tienen influencia los valores pequeños.

Los pitagóricos conocían la "Proporción perfecta", que establece que, dados dos números, el primero de ellos es a su media aritmética como su media armónica es al segundo de ellos:

1. Si tratamos de hallar el lado de un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo de lados 9 cm. y 4 cm. ¿qué tipo de media estamos utilizando?
2. Investiga qué es la media ponderada
3. Comprueba que se cumple la "Proporción perfecta"
4. Busca el significado de "armónica" como adjetivo

LA MEDIA

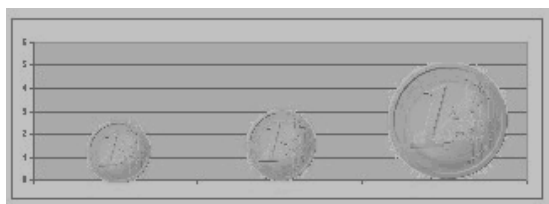
Una curiosidad sobre la media: Sir Francis Galton, científico británico del S.XIX, comprobó cómo en una feria de ganado en el que 800 personas apostaban cuál era el peso de un buey, nadie acertó el verdadero peso (1198 libras). Pero la media de las 800 papeletas fue... 1197 libras.

EL ORIGEN DE LA ESTADÍSTICA

Aunque en civilizaciones antiguas ya se realizaron algunos cálculos similares a los estadísticos, quizá el primer estudio estadístico fue el que realizó el mercader inglés John Graunt. Graunt incluyó en un libro las cifras de nacimientos y defunciones en Londres entre 1604 y 1661, tratando además de buscar cuáles eran las variables que influían en dichas cifras.

EL RETO

Para representar las ganancias de los tres socios de una empresa, el estadístico decidió cambiar las barras clásicas del gráfico por monedas de euros. Como los beneficios en miles de euros de los 3 socios habían sido, respectivamente, 2,5, 3 y 5, representó monedas de ese diámetro. Sin embargo, al socio con menos beneficio no le pareció bien la idea. ¿Por qué?



UNIDAD 15. PROBABILIDAD

EXPERIMENTOS ALEATORIOS

1. Clasifica los siguientes experimentos como aleatorios o deterministas:
 - a) Lanzar un dado
 - b) Medir la distancia entre dos ciudades
 - c) Extraer una carta de una baraja.
 - d) Jugar a la ruleta.
 - e) Jugar al parchís.
 - f) Adivinar en qué mano esconde un compañero una moneda.
2. Supongamos el siguiente juego: *“Jugamos con todas las cerillas de una caja. Los jugadores, por turno, irán cogiendo una cerilla. El jugador que tenga la suerte de coger la última, habrá ganado.”* ¿Qué diferencia existe entre que conozcamos el número de cerillas de la caja o no lo conozcamos?
3. Lanzamos una moneda y extraemos una bola de una urna en la que hay bolas blancas y verdes. Escribe el espacio muestral.

4. Completa:

_ I _ _ _
 _ M _ _ _
 _ P _ _
 _ O _ _ _
 _ S _ _ _
 _ I _ _ _
 _ B _ _ _
 _ L _ _ _
 _ E _ _ _

- Suceso que siempre se verifica.
 - Suceso formado por dos o más elementos.
 - Al lanzar un dado obtienes un número par o....
 - El suceso que se verifica cuando no se verifica un suceso dado.
 - El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se llama espacio.....
 - Una de las operaciones con sucesos.
 - El suceso que nunca se verifica.
 - Un experimento en el que no puedo predecir el resultado.
 - Un experimento en el que puedo predecir el resultado.
5. Tengo un libro de matemáticas, otro de lengua y otro de inglés. Indica todas las formas en las que puedo colocarles en un hueco de una estantería.
 6. Escribe el espacio muestral consistente en lanzar tres veces una moneda.
 7. Lanzamos una moneda, si sale cara lanzamos un dado de 6 caras y si sale cruz, lanzamos otra vez la moneda. Indica todas las posibilidades que podemos obtener.
 8. Lanzamos un dado de ocho caras y anotamos el número que obtenemos. Escribe:
 - a) El espacio muestral
 - b) El suceso $A = \text{“el número obtenido sea mayor que 5”}$
 - c) El suceso $B = \text{“el número sea par”}$
 - d) El suceso $C = \text{“el número obtenido sea mayor que 8”}$
 - e) El suceso contrario a $D = \text{“Obtener un 6 ó un 7”}$
 9. En un fin de semana la policía realizó un control de alcoholemia a 100 conductores dando positivo en la prueba 10. Calcula la frecuencia relativa de no dar positivo en la prueba.

10. Una pareja quiere tener tres hijos. Halla:
- El espacio muestral teniendo en cuenta si son varones (V) o mujeres (M).
 - El suceso $A =$ "al menos uno de los tres hijos sea varón".
 - El suceso $B =$ "el hijo mayor sea varón".
 - El suceso $C =$ "la hija más pequeña sea mujer".
11. Dados los sucesos $A = \{2,4,5,7,8\}$, $B = \{2,4,6,7\}$ del experimento aleatorio que tiene como espacio muestral $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, halla:
- $A \cup B$
 - $A \cap B$
 - $\bar{A}$
 - $\bar{B}$

EL AZAR. LEY DE LAPLACE.

12. Supongamos el experimento consistente en extraer una carta de una baraja española de 40 cartas y anotar si es figura o no.
Realiza el experimento 10, 20, 30 y 40 veces y anota los resultados que obtienes. ¿A qué valor se aproximan a 0,3 ó a 0,7?
13. Si tenemos dos urnas una con 3 bolas rojas, 2 bolas blancas y 5 amarillas y la otra con 4 bolas rojas, 2 blancas y 4 amarillas.
- Indica en qué urna es más probable obtener una bola roja.
 - ¿y obtener una bola blanca?
 - ¿y obtener una bola amarilla?
14. En Navidad realizamos un juego que consiste en apostar 2 € por un número comprendido entre 00 y 99. Si estas dos últimas cifras coinciden con las del primer premio del gordo de la lotería de Navidad el jugador gana 200 €. Calcula la probabilidad de que ganemos los 200 € si hemos apostado por 3 números.
15. Lanzamos un dado cúbico. Calcula la probabilidad de:
- Obtener un número mayor que 8.
 - Obtener un número impar.
 - Obtener un número mayor que 0.
16. En una boda hay 130 invitados sin incluir a los novios, de los cuales 50 son familia del novio, 40 familia de la novia y el resto amigos de los dos. Elegimos un invitado al azar, calcular la probabilidad de haber elegido a uno de los amigos de los novios.
17. Extraemos dos bolas de una urna en la que hay 6 bolas naranjas y 4 azules.
- Escribe el espacio muestral.
 - Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean naranjas.
 - Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.
 - Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean azules.
18. Participamos en una rifa en la que se han vendido papeletas numeradas del 000 al 999. Calcula la probabilidad de que nos toque el primer premio sabiendo que hemos comprado las que van del número 234 al 258.
19. Un autocar de 52 plazas va completo a una excursión al campo. Hay 18 madres, 12 padres y 22 niños.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el primero que baje del autocar sea un niño?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el primero que baje no sea un niño?

20. En una fábrica de bombillas se fabrican en un día 123.500 bombillas. En un control de calidad se comprueba que son defectuosas el 1 %. ¿Cuántas hay defectuosas cada día?
21. De una baraja francesa de 52 cartas, se extrae una carta, ¿cuál es la probabilidad de que sea un as?
22. Tenemos una urna con 4 bolas rojas y 3 bolas verdes y extraemos una bola.
 - a) Calcula la probabilidad de que la bola sea roja
 - b) Calcula la probabilidad de que la bola sea verde.
23. Se extrae una carta de una baraja española, calcula la probabilidad de que la carta extraída sea oros.

EXPERIMENTOS SIMPLES Y COMPUESTOS

24. Realiza el diagrama de árbol del experimento consistente en extraer dos bolas sin reemplazamiento de una urna donde tenemos bolas numeradas del 1 al 3.
25. Utilizando un diagrama de árbol escribe el espacio muestral del experimento lanzar dos monedas y anotar los resultados obtenidos.
26. Consideramos el juego: “Tenemos un saco con 3 bolas rojas, 2 amarillas y 1 blanca”. El juego acaba cuando extraemos la bola blanca. Como máximo se pueden extraer tres bolas. Escribe las diferentes posibilidades ayudándote de un diagrama de árbol.
27. Supongamos que lanzamos una moneda y un dado en forma de tetraedro con las caras numeradas del 1 al 4. Realiza el diagrama de árbol de este experimento y escribe el espacio muestral.
28. Indica si los siguientes experimentos son simples o compuestos:
 - a. Lanzar un dado en forma de tetraedro.
 - b. Extraer una carta de una baraja francesa.
 - c. Lanzar dos dados.
 - d. Extraer una carta y lanzar un dado.
 - e. Sacar una bola de una urna.
 - f. Elegir una letra del alfabeto
29. Realiza un diagrama de árbol y escribe el espacio muestral del siguiente juego:
 - a. Hacemos girar una ruleta en la que pueden aparecer los colores verde, rojo y amarillo con la misma probabilidad.
 - b. Si sale verde lanzas un dado de cuatro caras.
Si sale rojo lanzas una moneda
Si sale amarillo has terminado.
30. Realiza una tabla de doble entrada para calcular los elementos del espacio muestral del siguiente experimento: “Lanzamos dos dados cúbicos y anotamos el producto de los números obtenidos”
Calcular la probabilidad de que el producto sea 12.
31. Extraemos dos bolas con reemplazamiento de una urna donde hay 5 bolas rojas y 4 azules y 1 blanca. Escribe el espacio muestral y calcula la probabilidad de que las dos bolas sean rojas

El Rincón Multimedia

EXPERIMENTOS ALEATORIOS CON EXCEL

La hoja de cálculo nos permite realizar simulaciones de experimentos aleatorios. Es decir, podemos “generar” resultados de un experimento en el cual sólo interviene el azar, sin necesidad de efectuarlo previamente.

Una aplicación sería obtener boletos de quinielas de fútbol. Aunque es verdad que interviene otros factores como el jugar en casa, si un equipo tiene “mejores” jugadores que otro... vamos a suponer que no se puede predecir de antemano el resultado final.

Las funciones a utilizar van a ser:

- **ALEATORIO()** – Da como resultado un número al azar entre 0 y 1.
- **ENTERO()** – Devuelve la parte entera del número que haya entre paréntesis.
- **SI()** – Función que, dependiendo de una condición establecida, devuelve un resultado u otro.

Diseña la tabla donde insertaremos los partidos y los resultados. Deja la columna A en blanco porque ahí insertarás unos números aleatorios como sigue a continuación.

En A3 escribe: **=ENTERO(ALEATORIO()*3)+1**. Observa que con **ALEATORIO()*3** el número al azar generado estará entre 0 y 3. Para evitar decimales, aplicamos la función **ENTERO()** a lo anterior y por último, se ha sumado un 1 para que no aparezca el valor 0. Copia la fórmula anterior en el rango A4:A16. Puedes hacerlo con **Copiar** y **Pegar** o con el **controlador de relleno**, pinchando en él y, sin soltar, arrastrarlo en el resto del rango.

Ahora queda realizar la siguiente equivalencia: Si sale un 1 en A3, que el resultado sea “1”. Si no, puede ocurrir que si sale un 2, el resultado sea “X” y si no sale ni 1 ni 2, que el resultado sea un “2”.

Para ello, escribe en la celda C3:

=SI(A3=1;"1";SI(A3=2;"X";"2"))

Primero se escribe la condición y después, los resultados que nos interesan.

Ve a C3 y selecciona **Edición-Copiar**. En el rango C4:C11, con **Edición-Pegado Especial**, selecciona **Pegar-fórmulas**, para que el resto de formato de las celdas no varíe.

Puedes ocultar la columna A, seleccionándola previamente y yendo a **Formato-Columna-Ocultar**.

Pulsando la tecla F9, irás generando todas las quinielas que desees.

	A3	=ENTERO(ALEATORIO()*3)+1		
	A	B	C	D
1		GENERADOR DE QUINIELAS		
2		PARTIDO	RESULTADO	
3	1	1		
4		2		
5		3		
6		4		
7		5		
8		6		
9		7		
10		8		
11		9		
12		10		
13		11		
14		12		
15		13		
16		14		
17				

=SI(A4=1;"1";SI(A4=2;"X";"2"))							
	B	C	D	E	F	G	H
	GENERADOR DE QUINIELAS						
	PARTIDO	RESULTADO					
3	1	2					
1	2	1					
2	3	X					
3	4	2					
1	5	1					
3	6	2					
1	7	1					
3	8	2					
3	9	2					
1	10	1					
1	11	1					
2	12	X					
1	13	1					
2	14	X					

Pegado especial

Pegar

☐ Todo
 ☐ Validación

☒ Fórmulas
 ☐ Todo excepto bordes

☐ Valores
 ☐ Ancho de las columnas

☐ Formatos
 ☐ Formatos de números y fórmulas

☐ Comentarios
 ☐ Formatos de números y valores

Operación

☒ Ninguna
 ☐ Multiplicar

☐ Sumar
 ☐ Dividir

☐ Restar

☐ Saltar blancos
 ☐ Transponer

Aplica lo que sabes

En la sociedad hay muchas creencias relacionadas con la probabilidad que, a pesar de estar muy arraigadas, no tienen una base matemática real.

1. Muchas de ellas están relacionadas, lógicamente, con los juegos de azar. Por ejemplo, muchos de los que compran números de lotería se negarían a comprar el número 00000 ya que consideran que sería mucha casualidad que salieran todo ceros. ¿Qué argumentos podrías dar para demostrar que esa idea está totalmente equivocada?

2. Algo parecido pasaría con la lotería primitiva, donde la combinación 1,2,3,4,5 y 6 no suele jugarse porque se considera que es muy difícil que salgan tan seguidos y más aún siendo los primeros de la lista. ¿Es cierta esa suposición? Razona tu respuesta

3. Otra afirmación muy común podría ser: “si ayer salió el 27564 en la ONCE, es absurdo jugar hoy a ese mismo número porque es casi imposible que salga hoy otra vez”. Esta afirmación, que parece cargada de sentido común, ¿es cierta? ¿Tendría ese número hoy menos posibilidades que el resto?

4. En el mundo de la prensa deportiva, los datos se analizan desde innumerables puntos de vista. Por ejemplo, al final de un torneo apretado se calculan todas las combinaciones de posibles resultados y se afirman cosas como “el Deportivo tiene todas las de ganar porque un 80% de las combinaciones provocarían que fuera campeón?” ¿Quiere eso decir que el Deportivo tiene un 80% de probabilidad de ser campeón? ¿Crees que todas las combinaciones de resultados tendrán la misma probabilidad?

5. Otro comentario frecuente es cuando alguien dice: “Si ya tengo tres hijas, sería mucha casualidad que el próximo bebé también fuera niña”. ¿Debe esta persona esperar que su próximo bebé sea un chico o no tiene una base real para suponerlo?

Alrededor de las matemáticas

LOS JUEGOS DE AZAR

Las cifras de los juegos de azar no son muy alentadoras. Si elegimos una combinación de 6 números en la primitiva, la probabilidad de que sea la ganadora es de 1 entre 14 millones. Acertar el número de la Lotería Nacional o la ONCE es más “sencillo” pues suele haber un máximo de 100.000 números, si bien algunos de los premios más importantes están condicionados a acertar también el número de serie. ¿Y las quinielas? Si los resultados fueran totalmente al azar, habría una probabilidad de acertar de uno entre las más de 4.700.000 combinaciones que hay.

A pesar de las dificultades, hay jugadores que han demostrado un gran empeño. La familia de los Pelayos, después de analizar los defectos de las ruletas de los casinos e invertir muchos millones, diseñó un método con el que podían llegar a un 9% de beneficio (lo cuál, dada la inversión de tiempo y dinero, no parece mucho).

Eso no quita que el azar de vez en cuando arroje alguna esperanza. El matrimonio estadounidense de los Gallina consiguió la proeza de, en un mismo día, conseguir la combinación ganadora de dos loterías similares a la primitiva. La probabilidad de una casualidad semejante es de 1 entre 23 billones.

1. Busca más información sobre la historia de “Los Pelayos”
2. Mucha gente se queja de que en un sorteo “ni siquiera le ha tocado el reintegro”. En las loterías que conoces, ¿crees que es tan fácil conseguirlo?
3. En muchos programas televisivos se sortean grandes cantidades de dinero por sólo una llamada telefónica. ¿Por qué crees que son rentables estos concursos para las cadenas?

EL RETO

Se enfrentan en un singular duelo tres pistoleros: A, que nunca falla, B, que acierta en un 75% de sus disparos y C, que sólo acierta en el blanco un 50% de las veces. Si disparan por turnos en un orden que se elige por sorteo, ¿quién tiene más probabilidad de sobrevivir?

MOZART Y LA PROBABILIDAD

Según algunos estudios, Mozart inventó a los 21 años un juego de dados que servía para componer un breve vals de 16 compases, sin necesidad de ser músico ni saber nada de composición. Cada uno de los compases se escogía lanzando dos dados y anotando la suma del resultado.

Mozart compuso 176 compases diferentes (las 16 posiciones de los compases por los 11 posibles resultados de la suma de dos dados) y se calcula que hay aproximadamente unos 750 trillones de variaciones posibles de este vals.

EL SORTEO DE LA “MILI”

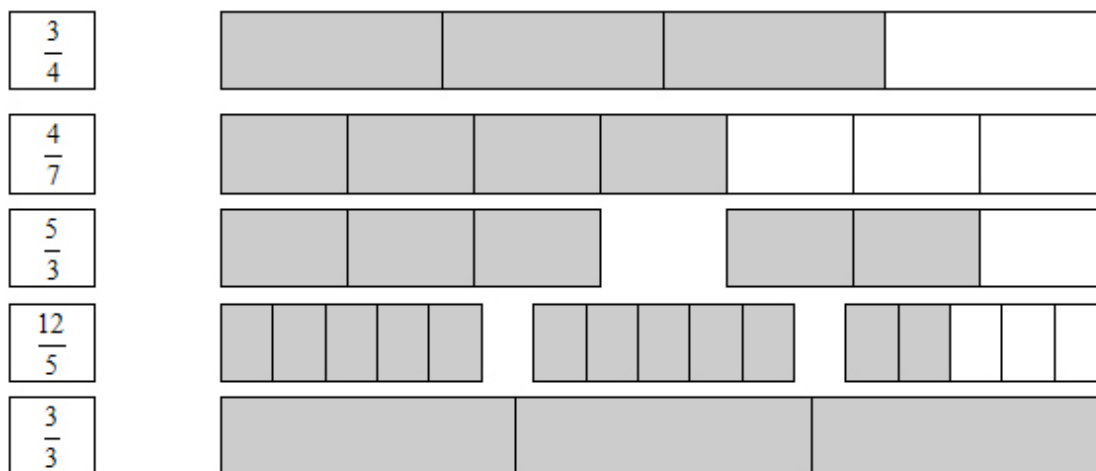
La probabilidad también puede afectar a cuestiones de la vida cotidiana. En 1997, cuando el servicio militar todavía era obligatorio, se realizó un sorteo entre todos los “mozos” para liberar del servicio a un porcentaje de ellos (es lo que se llamaba “excedentes de cupo”). Como había 165.342 reclutas, el Ministerio de Defensa asignó aleatoriamente un número del 1 al 165.342 a cada uno de ellos. La idea era sacar un número entre esa cantidad a partir del cuál estarían todos los excedentes de cupo. Así se procedió al sorteo: se extrajo del primer bombo (con dos bolas: 0 y 1) la primera bola: salió un 1. Después se extrajo una bola del segundo (bolas del 0 al 9) y salió un 8. Pero como existían sólo reclutas hasta el 165.342, esta bola no era válida así que se volvió a sacar otra bola del segundo bombo. Mucha gente protestó por la forma de llevar a cabo el sorteo ya que los reclutas que tenía un número a partir de 100.000 tenían más probabilidad de salir que aquellos cuyo número empezaba por cero. Además, se debió repetir el sorteo desde el principio una vez que salió el 8 en el segundo bombo.

SOLUCIONES

UNIDAD 1. NÚMEROS RACIONALES

1. $-3 \in \mathbb{Z}$; $5 \text{ y } 1 \in \mathbb{N}$; $\frac{3}{4} \text{ y } \frac{7}{2} \in \mathbb{Q}$.

2.



3. Porque $-\frac{8}{4} = -2$ y $-\frac{8}{-4} = 2$

4. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{25}{7}$ d) $\frac{6}{7}$

5. a) Por ampliación, $\frac{36}{84}$ y $\frac{180}{420}$. Por simplificación, $\frac{9}{21}$ y $\frac{3}{7}$.

b) Por ampliación, $\frac{96}{40}$ y $\frac{480}{200}$. Por simplificación, $\frac{24}{10}$ y $\frac{12}{5}$

6. a) Sí, pues $7 \cdot 9 = 21 \cdot 3$ b) Sí, pues tienen igual fracción irreducible, $\frac{4}{5}$.

c) Sí, pues $(-6)(-12) = 9 \cdot 8$ d) No, porque la primera es menor que la unidad, y la segunda, mayor.

7. Sí, si el numerador es igual que el denominador.

8. Como $\frac{4}{7} = \frac{48}{84}$, mayores pueden ser $\frac{49}{84}, \frac{50}{84}, \dots$ Menores, $\frac{47}{84}, \frac{46}{84}, \dots$

9. a) 6 b) 23 c) ± 2 d) 9

10. A los dos la misma distancia.

11. Se obtiene que $\frac{-1}{4} < \frac{2}{3} < \frac{7}{5}$

12. a) $\frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7}$ b) $\frac{1}{10} < \frac{3}{16} < \frac{5}{18}$ c) $\frac{-10}{3} < -\frac{5}{6} < \frac{-7}{9}$ d) $\frac{1}{20} < \frac{3}{10} < \frac{5}{8}$

13. a) $\frac{27}{5}$ b) $\frac{1}{14}$ c) $\frac{49}{640}$ d) $\frac{8}{15}$
 e) $\frac{31}{120}$ f) $-\frac{31}{105}$ g) $\frac{46}{225}$ h) 1

14. 112

15. Es la misma cantidad.



16. a) $\left(\frac{2}{5}\right)^5$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^6$ c) $\left(\frac{7}{5}\right)^5$ d) $3^{-3} \cdot 5^2 = \frac{25}{27}$

17. a) $\frac{1}{25} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$ $\frac{-125}{27} = \left(\frac{-5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-5}{3}\right)$ $\frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$
 b) $\frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^4 : \left(\frac{1}{5}\right)^2$ $\frac{-125}{27} = \left(\frac{-5}{3}\right)^5 : \left(\frac{-5}{3}\right)^2$ $\frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^7 : \left(\frac{3}{2}\right)^3$

18. a) Decimal exacto.
 b) Decimal periódico mixto, de periodo 5 y anteperiodo 17
 c) Decimal periódico mixto, de periodo 75 y anteperiodo 1
 d) Decimal periódico puro, de periodo 03

19. Decimales exactos: 0,12 10,2

 Decimales periódicos puros: $10,\widehat{2}$ y $0,\widehat{21}$

 Decimales periódicos mixtos: $1,0\widehat{2}$ y $0,2\widehat{1}$

20. a) $\frac{233}{99}$ b) $\frac{47}{20}$ c) $\frac{106}{45}$ d) $\frac{353}{150}$

21. $\frac{29}{9}$ y $\frac{30}{9}$

22. a) 6 b) -0,1215 c) $\frac{31}{60}$ d) $\frac{81}{500}$ e) $\frac{-137}{12}$

23. Aproximadamente, 9,80 euros cada uno.

24. a) $7,781 \cdot 10^{21}$ b) Aproximadamente, $1,78 \cdot 10^{14}$

25. Unos 3 mil millones de años.

26. a) 10 b) 10 c) 4 d) 10

27. El 100%

28. 18 ejercicios

29. Por separado, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$ y $\frac{1}{18}$ respectivamente. En un día, pintarían $\frac{37}{180}$ de la fachada.

30. 400 grs de harina.

31. a) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{5}$, respectivamente.
b) $\frac{23}{40}$ de los ejercicios.
c) 1,74 horas (una hora y tres cuartos, aprox)

32. a) 4,3 b) 4,8 c) 5 veces

APLICA LO QUE SABES

1.

Límite de velocidad (km/h)	Velocidad del conductor (km/h)	Puntos a restar
90	120	3
120	180	6
100	140	3
50	90	6

2. 0,55 mg/l.

3. 1413,18 , es decir 1413 conductores sancionados.

4. 3034,9 hombres sancionados.

5. Mediante la fórmula $e = vt$, entonces $v = \frac{e}{t}$, como el espacio es fijo (la distancia de un peaje a otro en la autopista) y el tiempo que se tarda también se sabe, por los tickets, se obtendría la velocidad.

EL RETO

A=5, G=1, O=0, T=3, U=7

UNIDAD 2. NÚMEROS REALES

1. a) Z b) Q c) I d) I e) N f) Q

2. 2,343443444... (va aumentando los “4”)
 $\sqrt{2} - 1$ (pues $\sqrt{2}$ ya sabemos que es irracional)
 π^2 (pues π es irracional)

3. a) Por exceso 50,15 y por defecto 50,14
 b) Por exceso 3,27 y por defecto 3,26
 c) Por exceso 2,24 y por defecto 2,23
 d) Por exceso -4,15 y por defecto -4,16

4. a) 31,006 b) 6,728 c) 8,425 d) 2,383

5. a) F, por ejemplo π es real pero no racional.
 b) V, por ejemplo los decimales exactos.
 c) F, los “9” van aumentando, no se mantienen constantes.
 d) V, por ejemplo $\sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$ al sumarlos da 1.

6. 1,91 1,903 1,92

7. a) 12 b) 0 c) 0,5 d) 5

8. a) V b) F, pues $|0 - 3| = |-3| = 3$
c) F, $5 + |-2| = 5 + 2 = 7$ d) V

9. a) V b) V
c) F, $|3 - 8| = |-5| = 5 \neq -5$ d) V
e) F, $|-2| = 2 \neq -|2|$ f) F, $\left|\frac{-3}{5}\right| = \frac{3}{5}$

10. a) = b) < c) < d) >
e) = f) = g) > h) <

11. a) V b) F c) F d) V
La igualdad es cierta si el signo de los sumandos es el mismo.

12. a) 0,00276 b) 0,00004 c) 0,00076 d) 0,08276

13. Aproximadamente, 0,0019 (unas 2 milésimas)

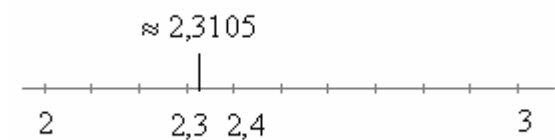
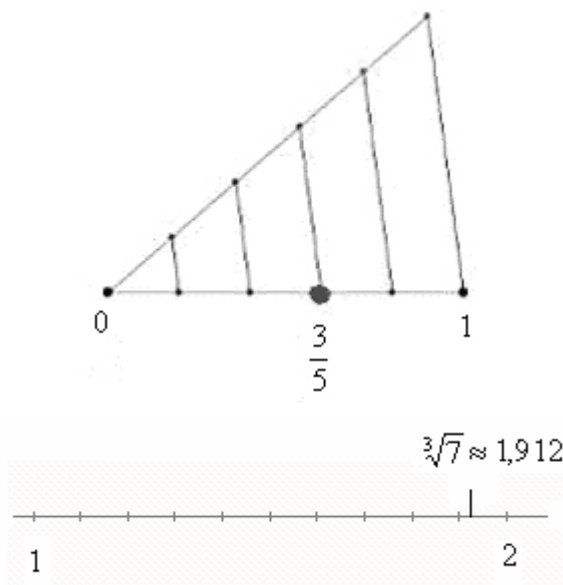
14. a) 7,19 b) 1,73 c) 0,67 d) 3,14

15. Unos $3,36 \cdot 10^9$ latidos.

16. 1684 pesetas $\approx$ 10,12 euros.

17. a) Sí b) No c) Sí d) No

18.

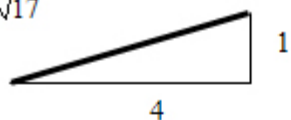


19.



20.

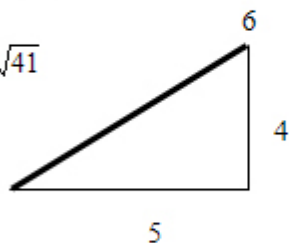
a) $\sqrt{17}$



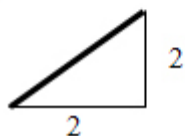
b) $\sqrt{37}$



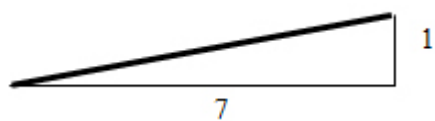
c) $\sqrt{41}$



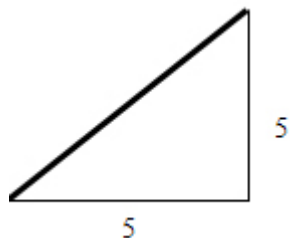
d) $\sqrt{8}$



21. Como $50 = 49 + 1 = 7^2 + 1^2$



Y también $50 = 25 + 25 = 5^2 + 5^2$



22. a) 20,086 b) 4,760 c) 0,368 d) 0,525

23. a) $7\sqrt{5}$ b) $-3\sqrt{3}$ c) $15\sqrt{14}$ d) $4\sqrt{4} = 8$

24. a) F, no se pueden sumar b) V
c) V d) F, han de tener igual índice.

25. a) $2\sqrt{6}$ b) $5\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{7}$ d) $7\sqrt{2}$
e) $3\sqrt[3]{3}$ f) $4\sqrt[4]{4}$ g) $5\sqrt[3]{5}$ h) $2\sqrt[3]{16}$

26. a) $\sqrt{27}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt[4]{48}$ d) $\sqrt[3]{320}$

27. a) $6\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{3}$
d) $-2\sqrt{5}$ e) $2\sqrt{2}$ f) $3\sqrt[4]{3}$

28. Sí en ambos casos:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$$

29. Al aproximar la superficie de la hoja DIN A4, el error relativo es de 0,0088 y al aproximar el área del campo de fútbol, es de 0,0504 (mayor).

APLICA LO QUE SABES

1. 1,684 error absoluto, $1,687 \cdot 10^{-3}$ error relativo.

2. Cinco euros son mil escudos o multiplicar a cualquier cantidad en euros por 200 para obtener el cambio a escudos. Se cometería un error relativo de $2,40 \cdot 10^{-3}$.

3. Las aproximaciones son correctas, pero hay varias contradicciones, por ejemplo:

1) $3 - 2 = 1$ pta, en euros:
 $0,02 - 0,01 = 0,01$ €, sin embargo 1 pta son 0,02 € no 0,01 €.

2) $8 + 3 + 2 = 13$ ptas, en euros:
 $0,05 + 0,02 + 0,01 = 0,08$ €, pero por otro lado, $0,08 € = 4 \cdot 0,02 = 4 \cdot 3$ ptas = 12 ptas, y tendría que ser 13.

Estas contradicciones se deben a que sólo se puede redondear a 2 decimales, al no haber monedas inferiores a los céntimos.

4. Si hacemos el cambio a 601 €, se pierde 0,01 € = 1 pta; si el cambio es a 600 €, el error es 1,01 = 168 ptas se pierden.

5. 11,1 %.

6. 0,30 € = 50 ptas.

7. Pregunta libre.

UNIDAD 3. PROPORCIONALIDAD

1. a) Directa b) Directa c) No proporcional d) Inversa

2. Inversa, ya que cuantos más grupos se creen para los 200 alumnos, menos habrá por grupo

3. $a=27$

4. 36.000 €

5. 14 días

6. 14 minutos

7. 528/10000

8. 18

9. Son inversamente proporcionales. No, porque el número depende de la superficie y el lado es una medida lineal

10. 8 cm

11. 3,6 días

12. 18 minutos

13. 100 cm

14. 10 días

15. 129 €, 107,5 € y 172 €, respectivamente.

16. 22695, 28 €, 27234, 34 € y 30260, 38 €

17. 2100 y 1440

18. 5,45 cm², 8,72 cm² y 11,99 cm². Círculo completo= 78, 54 cm².

19. 6,3 €

20. a) 37,5 b) 10,26 c) 26,25

21. 81% autopistas y 19% secundarias

22. 21 disponibles

23. 458,3 millones de habitantes

24. 48 €

25. 46,4 €

26. 61,9 kg pesa realmente

27. 180.000 €

28.

Precio sin impuesto	% de impuesto	Precio con impuesto
24 €	6%	25,44 €
1500 €	33%	1995 €
32,5 €	16%	37,7 €

29. 23,4 €

30. 1408 €

31. 25,95%

32. Aumentó un 2,7 %

33. $540 \cdot 0,023 = 12,42$ b) $0,24 \cdot 0,15 = 0,036$ c) 5,28 d) 0,0288

34. 82.758,6 kg el año pasado

35.

Capital inicial	tiempo	tipo interés	Intereses
2.000 €	2	6	240 €
12.000 €	10	4	480 €
15.000 €	1	5	750 €
10.000 €	3	1,5	450 €

36. 2425,6 €

APLICA LO QUE SABES

1. La más ventajosa es “2 x 1”. La siguiente es “compra 3 y paga 2”, la última es “segunda unidad a mitad de precio”.
2. La 2ª es más rentable. Dividir el precio del producto entre su peso expresado en kg.
3. Un 29%, más del 20%.
4. 8% de recargo sobre el precio original.
5. El más barato debo descartar. Obtengo menor descuento si cojo los tres más caros y el más barato, el de 10 €.

EL RETO

Cada uno se ha comido $\frac{5}{3}$ de los bocadillos por lo que de verdad han compartido es uno $\frac{4}{3}$ y otro $\frac{1}{3}$ por lo que el reparto debe ser de 4 y 1 €, respectivamente.

UNIDAD 4. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.

- a) EL cubo del opuesto de un número.
- b) Una fracción al cuadrado.
- c) El inverso de un número.
- d) Raíz cuadrada de la diferencia de dos números.
- e) Diferencia del cubo de un número y su cuadrado.
- f) La suma de dos números consecutivos.
- g) La mitad de la raíz cuadrada negativa de un número.
- h) El opuesto del producto del cuadrado de un número por otro número.

2.

a) $2n + 2n + 2$ b) $-x - 2x$ c) $\frac{-x}{5}$ d) $\frac{1}{-x}$ e) $\sqrt{a-b}$

3.

a) np b) $\frac{b \cdot h}{2}$ c) $\frac{x}{n}$

4.

a) $4a$ b) $\frac{b \cdot a}{2}$ c) $\pi \cdot r^2$ d) x^3

5. a) -12. b) 0.

6. a) Monomio de grado 8.

c) Monomio de grado 1.

b) y d) No son monomios.

7. $n = a$, $m = a + 4$, siendo a cualquier número natural.

8.

a) $-\frac{3}{35}x$ b) $11b$ c) $8x - 5y$ d) $-4 - 4t$

9.

a) $-10x^2 \cdot y^3$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{8}t^3$ c) a^{14} d) $-2abx$

10.

a) $-ab^2$ b) $-2xy$ c) $\frac{8}{49}t \cdot u^2$

11. a) 3 b) 3 c) 6 d) 2.

12.

a) $5x^4 - 6x^3 + x^2 + x - 14$

b) $5x^4 - 2x^3 - 5x$

c) $-5x^6 + 34x^5 - 64x^4 + 31x^3 + 17x^2 - 74x + 88$

d) $-2x^5 + 13x^4 - 22x^3 + 5x^2 + 18x - 24$

13. a) Cociente = $-4t - 12$; Resto = -18 .

b) $\frac{4}{3}a^5 - \frac{1}{3}a^4 - \frac{3}{2}a^3 + \frac{3}{8}a^2$

14. a) $C = 3x^2 - x - \frac{1}{2}$ $R = \frac{11}{2}$

b) $C = \frac{8}{5}x^2 - 6$ $R = 0$.

c) $C = 2x^2 - x - 2$ $R = 8x^2 - 2x - 12$

d) $C = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ $R = 0$.

15. a) $C = x^3 - 6x^2 + 24x - 100$ $R = 401$.

b) $C = 2x^4 - 7x^3 + 21x^2 - 63x + 183$ $R = -540$.

c) $C = 3x^3 - 8x^2 + 15x - 30$ $R = 57$.

16. a) $P(-4) = 256 + 128 + 16 + 1 = 401$.

b) $P(-3) = -486 - 81 + 18 + 9 = -540$.

c) $P(-2) = 48 + 16 - 4 - 3 = 57$.

17. $R = 44$.

18. $K = 3/2$.

19. a) 368

b) -411

20. a) $2x \cdot (x^2 - 3x + 4)$ b) $a \cdot (3ab - 6 + 20a)$

21.

a) $36a^2 + 4b^2 - 24ab$

b) $9t^2 - 4s^2$

c) $(4y - 3x) \cdot (4y + 3x)$

d) $(\sqrt{6} - t) \cdot (\sqrt{6} + t)$

22.

a) $(3x - 1)^2$

b) $\left(\frac{1}{4}x - 8\right)^2$

c) $(2a - x)^2$

23.

a) $(7x-11y) \cdot (7x+11y)$

c) $(a^2-2b^2) \cdot (a^2+2b^2)$

b) $\left(\frac{x}{4}-y\right) \cdot \left(\frac{x}{4}+y\right)$

d) $(\sqrt{3}y-\sqrt{2}z) \cdot (\sqrt{3}y+\sqrt{2}z)$

24.

a) $\frac{1-a}{5}$

b) $\frac{3x(x+1)}{x-1}$

25. a) Sí

b) No

26.

a) $\frac{-2x^2-6x}{9-x^2}; \frac{3}{9-x^2}; \frac{3-x}{9-x^2}.$

b) $\frac{z^2-4z}{(z-4)^2(z+4)}; \frac{4z+16}{(z-4)^2(z+4)}.$

27.

a) $\frac{x+1}{x-2}$

b) $\frac{-x^2-x-2}{x^2-1}$

c) $(3-x)y$

d) $\frac{a^2-4a-1}{a-2}$

APLICA LO QUE SABES

a) 30 m. Es lógico el resultado, el objeto está en lo alto del edificio sin haber sido lanzado.

b)

t (tiempo)	A(t) (altura)
0	30
1	50
2	60
3	60
4	50
5	30

c) Que se repiten los valores 2 a 2. En los 5 primeros segundos el objeto empieza a coger altura y vuelve a caer llegando justo a los 5 segundos a la altura del edificio (30m).

d) 61,25 m a los 2,5 segundos.

e) A los 6 sg.

f) A los 70 metros.

g) $A(t) = 5t^2 - 25t + 30$

EL RETO

Al ser $x=y$ no podemos dividir entre $(x-y)$ ya que su valor es cero.

UNIDAD 5. ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

1. $x = 1$ sí es solución

$x = 2$ no es solución

2. a) $x = 0$ b) $x = -10$

3. a) $x = -11$ b) $x = \frac{1}{2}$
c) $x = \frac{5}{3}$ d) $x = \frac{5}{12}$

4. $x = \frac{102}{7}$

5. a) $x = \frac{3}{7}$ b) $x = \frac{3}{5}$

6. a) $x = 20$ b) $x = 1$

7. a) $x = -\frac{17}{2}$ b) $x = 0$

c) $x = \frac{11}{3}$ d) $x = -\frac{36}{7}$

8. a) $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

b) $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$

c) $x_1 = 2$ y $x_2 = 7$

d) $x = 4$ solución doble

9. a) $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$

b) $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$

c) $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$

d) $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$

10. a) $x_1 = -5$ y $x_2 = -1$

b) $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

11. a) $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ dos soluciones diferentes.

b) $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ninguna solución.

c) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ dos soluciones iguales.

d) $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ dos soluciones diferentes

12. $a = 16$

13. a) Incompleta b) Completa

c) Completa d) Incompleta

14. a) $x_1 = 0$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$ b) $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$ c) $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$ d) $x_1 = 4$ y $x_2 = -4$

15. Cualquier ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $b=0$ ó $c=0$. A modo de ejemplo
 $16x^2 - 4x = 0$; $9x^2 - 1 = 0$; $12x^2 = 0$

16. a) $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{5}{3}$

b) $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $x = 3$ solución doble

d) $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{3}{5}$

17.

$$x_1 \cdot x_2 = 9$$

$$x_1 + x_2 = -6$$

18. $x^2 - 6x + 8 = 0$

19. $x_2 = 3$

20. a) $x_1 = -4$ y $x_2 = -3$

b) $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$

c) $x_1 = 2$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$

21. a) $x = 2$ solución doble

b) $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

c) $x_1 = 0$ y $x_2 = -4$

22. $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$

23. a) $x = 1$ b) $x = 2$

24. $x = 3$ sí es solución porque cumple la ecuación.

$x = 7$ no es solución porque no cumple la ecuación.

25. María tiene 7 años y Daniel 10 años.

26. El ganador obtuvo 440 votos.
27. Los números son 5 y 6.
28. Primer montón 20 cartas
Segundo montón 5 cartas
Tercer montón 15 cartas.
29. El hijo tiene 11 años y el padre 43 años.
30. El número natural es 3.
31. Tiene 18 lados.

APLICA LO QUE SABES

1. 40×30 .
2. 24 postes.
3. 11 m.
4. 3 horas un surtidor, y 6 horas el otro.
5. $25 \times 25 = 625 \text{ m}^2$.
6. 12 m de separación entre las dos vallas.

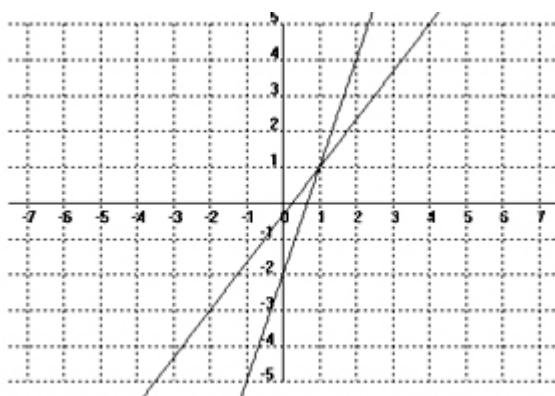
UNIDAD 6. SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

1. a) No, es de segundo grado
- b) Si es lineal

2. a) No es solución ya que la primera ecuación no se verifica.
- b) Si es solución.
3. a) Si son equivalentes.
- b) No son equivalentes.
4. La solución es $x = \frac{1}{5}, y = -\frac{3}{5}$
5. a) La solución es $x = 1, y = 2$
- b) Tiene infinitas soluciones ya que las dos ecuaciones son proporcionales.
6. a) La solución es $x = -1, y = -1$
- b) No tiene solución..
7. a) No tiene solución ya que $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ porque $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{5}{8}$
- b) Tiene solución única ya que $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ porque $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{-1}$
- c) Tiene solución única ya que $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ porque $\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{-3}$
8. a) Incompatible
- b) Compatible determinado
- c) Compatible determinado

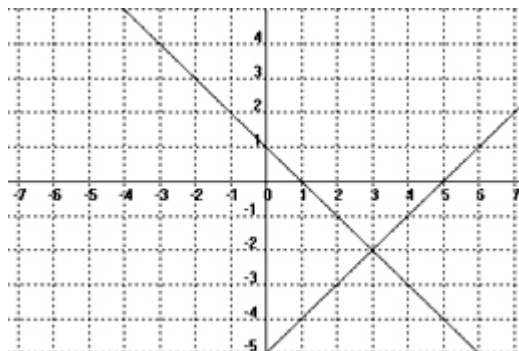
9.

La solución es $x = 1$ e $y = 1$



10.

La solución es $x = 3$ e $y = -2$



11. a) La solución es $x = 3$, $y = 1$

b) La solución es $x = 2$, $y = 1$

12. a) La solución es $x = 2$, $y = 1$

b) No tiene solución.

c) La solución es $x = -2$, $y = -1$

d) La solución es $x = 1$, $y = 1$

13. a) La solución es $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

b) La solución es $x = 0$, $y = 1$

14. a) Tiene grado 3, no es cuadrático.
- b) Si es cuadrático. Las soluciones son $(x_1, y_1) = (7, -11)$ y $(x_2, y_2) = (1, 1)$
- c) Si es cuadrático. Las soluciones son $(x_1, y_1) = (5, 1)$ y $(x_2, y_2) = (1, 5)$

15. a) Las soluciones son $(x_1, y_1) = (4, 2)$ y $(x_2, y_2) = (-2, -4)$
- b) Las soluciones son $(x_1, y_1) = (3, 2)$ y $(x_2, y_2) = (2, 3)$

16. a) Las soluciones son $(x_1, y_1) = (2, 2)$ y $(x_2, y_2) = \left(\frac{14}{13}, \frac{34}{13}\right)$
- b) Las soluciones son $(x_1, y_1) = (2, -3)$ y $(x_2, y_2) = \left(\frac{-11}{6}, \frac{-31}{18}\right)$

17. a) Las soluciones son $(x_1, y_1) = (1, 1)$,
- $(x_2, y_2) = (1, -1)$, $(x_3, y_3) = (-1, -1)$ y $(x_4, y_4) = (-1, 1)$

- b) Las soluciones son i
- $$(x_1, y_1) = (\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$$
- $$(x_2, y_2) = (\sqrt{3}, -2\sqrt{2})$$
- $$(x_3, y_3) = (-\sqrt{3}, -2\sqrt{2})$$
- $$(x_4, y_4) = (-\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$$

18. Los números son 3 y 7
19. Compraremos 15 chicles y 12 piruletas
20. Debo comprar 12 bolsas de patatas y 6 bolsas de cebollas
21. Los números son 2 y 6
22. Los lados iguales miden 8 cm. cada uno y el lado desigual 4cm
23. Hay 18 chicos y 10 chicas
24. El equipo A mete 5 goles y el equipo B 3 goles
25. Hay 10 hombres y 22 mujeres

26. La solución es 16 y 5

27. Debo vender 25 pulseras de 32 € y 10 de 50 €

APLICA LO QUE SABES

1. 18,75 puntos.

2. 17 fallos.

3. 10 dejó en blanco.

4. Si comete 33 fallos o más obtendrá puntuación negativa.

5. a) No, porque en principio al azar uno acierta una de cada 4, es decir falla 3 y acierta 1, por lo que habría que restar 0,33. b) 10 aciertos con puntuación $10 \times 1 - 30 \times 0,25 = 10 - 7,5 = 2,5$ c) Sí, es más rentable

6. 0,33

EL RETO

10, 5 € y no 10 € como se podría pensar. La botella pesa 220 g

UNIDAD 7. SUCESIONES

1.

a) $a_n = 1/n$

b) $b_n = -n$

c) $c_n = \sqrt{n}$

d) $d_n = 2n - 1$

2.

a) 5, 1 -3, -7, -11

b) -2, 2, 18, 52, 110

c) 1, 3, 9, 27, 81

d) 1, 1, 7/9, 5/8 y 13/25

3. -2 a c) y d), 3/2 a ninguna, 11/8 a a) y 7/3 a b)

4. $a_n = (-1)^{n \cdot n}$

5. $a_n = 2n + 3$

6. $d = 28/3$

7. $S_8 = -104$

8. $d = 0,2$

9. La 61

10. 6, 4, 2, 0...

11. 0,75 m distan las filas y 8,25 m

12. 0,25 €

13. 200 € la entrada del equipo y 110 € la cuota

14. 2500

15. $a_n = -n + 7$

16. la b) y la c)

17. a) -1, -102, -10404... b) 0,02; 0,1; 0,5

18. 0,5

19. Sólo la a)

20. 324

21. $r = \sqrt{3}$ y la suma es $120 + 39\sqrt{3}$

22. 14045 €

23. 240

24. Le interesa más el segundo ya que gana 4,64 € al mes

25. 10, 40 y 160 €

26. 12 minutos.

27. a) $1/3$ b) $11/9$ c) $354/100$

APLICA LO QUE SABES

1. Diagonales de un polígono regular de n lados son $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

2. $2 \cdot (n+1) \cdot n = 2n^2 + 2n$.

3. $n + \frac{n \cdot (n-3)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$.

4. $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Se relaciona con el 1. Cada persona (n) se da la mano con todas las demás excepto ella misma ($n-1$) y se divide entre 2 porque repetimos cada una 2 veces.

5. $\frac{(2n-1) \cdot (2n-2)}{2} = (2n-1) \cdot (n-1)$.

EL RETO

a) Son horas: 1:40, 1:55... Tocaría las 2:55

b) Son las cifras en orden alfabético. Tocaría el tres.

UNIDAD 8. GEOMETRÍA PLANA. FIGURAS EN EL PLANO

1. 14,96 m.

2. a) 12 cm. b) 33,42 m.

3. No es rectángulo porque $54^2 \neq 35^2 + 42^2$.

4. a) 15,56 cm. b) 5cm.

5. 14,85 cm.

6. 13,26 cm.

7. 6,93 cm.

8. Teniendo en cuenta la relación fundamental de los tres ángulos de un triángulo, el otro ángulo mide $180^\circ - (17^\circ + 78^\circ) = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$ en el primer triángulo.

Calculamos el ángulo desconocido del 2º triángulo, $180^\circ - (78^\circ + 85^\circ) = 17^\circ$.

Luego los triángulos son semejantes, puesto que tienen los tres ángulos iguales.

9. Por triángulos semejantes 3,8 m mide la estatua.

10. Por teorema de Tales: $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}$; $\frac{15}{11,5} = \frac{\overline{C'D'}}{8}$; despejando $\overline{C'D'} = 10,43\text{cm}$.

11. $\hat{C} = \hat{C}' = 120^\circ$ y $\hat{A} = \hat{A}' = 28^\circ$.

$\frac{a}{10} = \frac{15,4}{14}$; $a = 11\text{cm}$. $\frac{14}{c'} = \frac{10}{5}$; $c' = 7\text{cm}$.

12. $a' = 7\text{cm}$; $b' = 16,8\text{cm}$ y $c' = 18,2\text{cm}$. $\hat{A}' = 35^\circ$.

Como el triángulo ABC es rectángulo, puesto que $13^2 = 12^2 + 5^2$, entonces $\hat{B} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ = \hat{B}'$ y $\hat{C} = \hat{C}' = 90^\circ$.

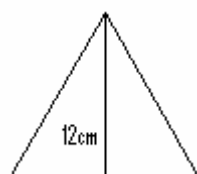
13. No son paralelas porque no cumplen el teorema de Tales, $\frac{12}{8} \neq \frac{5}{3,5}$.

14. 46,65 m mide la antena; 72,88 m mide el otro cable.

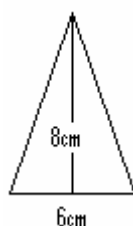
15. Son triángulos semejantes, las alturas de los dos edificios son 5,5 metros y 30,94 metros.

16.

a)



b)



a) $l = 10,73\text{cm}$.

$P = 32,19\text{cm}$.

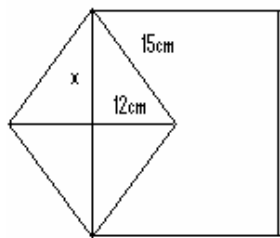
$A = 64,32\text{ cm}^2$.

b) $l = 8,54\text{cm}$.

$P = 23,08\text{ cm}$.

$A = 24\text{ cm}^2$.

17.



$$x = 9\text{cm}.$$

$$d = 18\text{ cm} = \text{lado cuadrado}.$$

$$A_c = 324\text{ cm}^2.$$

$$A_r = 216\text{ cm}^2.$$

18. 54 cm^2 .

19. A triángulo = 6 cm^2 .

$$A_{\text{rectángulo}} = 32\text{ cm}^2.$$

$$\text{Porcentaje} = 6 / 32 \cdot 100 = 18,75\%.$$

20. lado del cuadrado grande = $\sqrt{50}\text{cm}$.

$$\text{Area del cuadrado grande} = 50\text{ cm}^2.$$

La cruz se divide en 9 cuadrados pequeños, Area del cuadrado pequeño = $50/9 = 5,5\bar{5}\text{cm}^2$.

$$21. A_{\text{coloreada}} = A_{\text{circunferencia}} - A_{\text{cuadrado}} = \pi \cdot 6^2 - 72 = 41,09\text{cm}^2.$$

22. $4l = 2\pi r$ despejando l en función de r , $l = \frac{\pi r}{2}$ sustituyendo en el área del cuadrado $A_{\text{cuadrado}} = \frac{\pi^2 r^2}{4}$ y comparando con el área del círculo $A_{\text{círculo}} = \pi r^2$ es mayor el área del círculo, por lo que se necesita más superficie de cristal para la ventana circular que para la cuadrada.

$$23. 90\text{km} / h = 25\text{m} / \text{sg} = 8 \cdot 2\pi r \text{ m} / \text{sg} \text{ despejando el radio } r = 0,5\text{m}.$$

APLICA LO QUE SABES

1. 16800 €

2. $27,84\text{ m}^2$

3. Unos 1170 cm^2 .

4. Unos 85 m^2 .

5. Aproximadamente un 40%

6. $7,5 - 6,25 = 1,25$ m

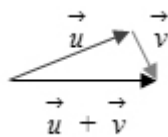
EL RETO

Al doblar el radio, el espacio comprendido dentro de la cuerda aumenta $2 \times 2 = 4$ veces

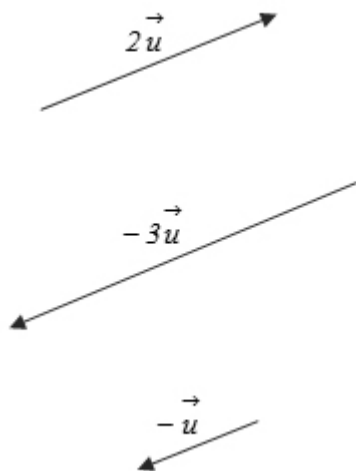
UNIDAD 9. MOVIMIENTOS EN EL PLANO

1. $\vec{AB} = (-3, 1)$ y $\vec{BA} = (3, -1)$

2.



3.



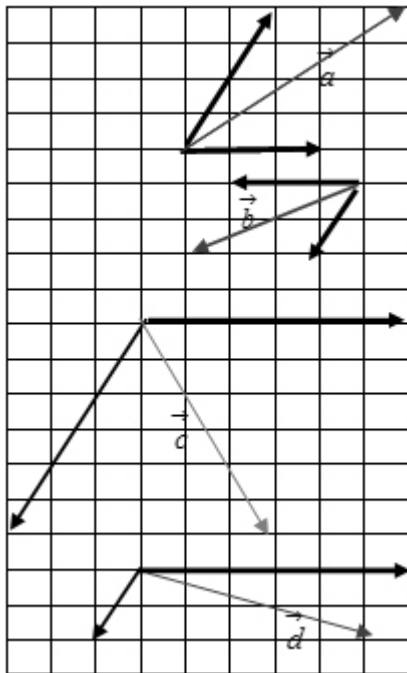
4. En la Figura 1

- a) $\vec{AB}$ y $\vec{DE}$ no son equipolentes porque tienen distinto sentido
- b) $\vec{AF}$ y $\vec{CD}$ son equipolentes
- c) $\vec{BC}$ y $\vec{EF}$ no son equipolentes porque tienen distinto sentido
- d) $\vec{BA}$ y $\vec{CD}$ no son equipolentes porque tienen distinta dirección.

En la Figura 2

- a) $\vec{AB}$ y $\vec{DE}$ no son equipolentes porque tienen distinto sentido
- b) $\vec{AF}$ y $\vec{CD}$ son equipolentes
- c) $\vec{BC}$ y $\vec{EF}$ no son equipolentes porque tienen distinto sentido
- d) $\vec{BA}$ y $\vec{CD}$ no son equipolentes porque tienen distinta dirección.

5. a) $\vec{a} = 2\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{b} = -\vec{u} - \vec{v}$ c) $\vec{c} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$ d) $\vec{d} = -\vec{u} + 2\vec{v}$



6. El vector debe tener extremo en $D=(-4,2)$ para que sus coordenadas sean las mismas que las de $\vec{AB}$

7. $\vec{u} = (2, 0)$, $\vec{v} = (2, 2)$ y $\vec{w} = (3, -1)$

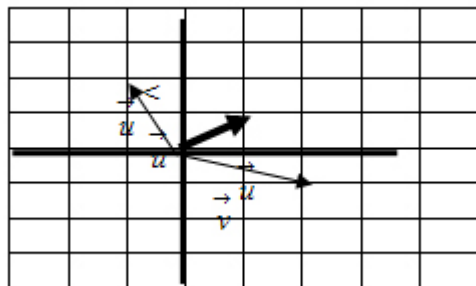
8. a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (3, 8)$

b) $\vec{u} + 2\vec{v} = (9, 7)$

c) $\vec{u} - \vec{w} = (3, 0)$

d) $2(\vec{v} + \vec{w}) = (4, 10)$

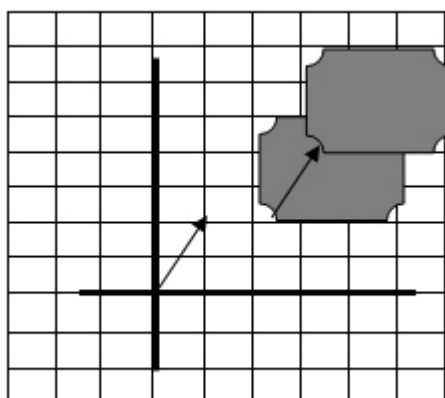
9.



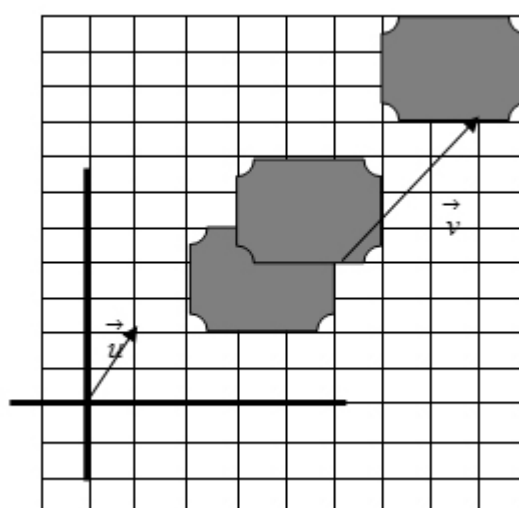
10. a) Si porque no cambia el tamaño ni la forma.
 b) No porque cambia el tamaño.
 c) Si porque no cambia el tamaño ni la forma.
 d) Si porque no cambia el tamaño ni la forma.

11.

a)



b)



La traslación sería la misma si el vector fuera $\vec{u} + \vec{v}$

12. Los puntos que obtenemos forman un hexágono regular.

13. a)

I Si tiene ejes de simetría

b)

Π No tiene eje de simetría

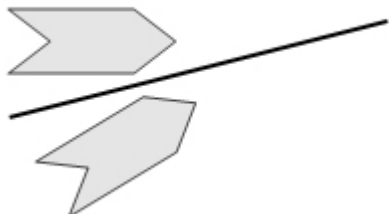
c)

Ψ No tiene eje de simetría

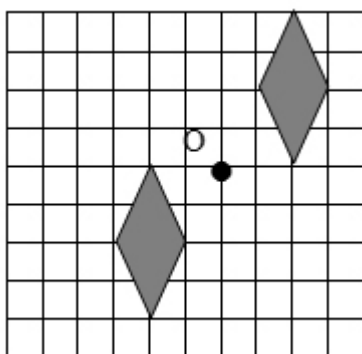
d)

D Si tiene eje de simetría

14.

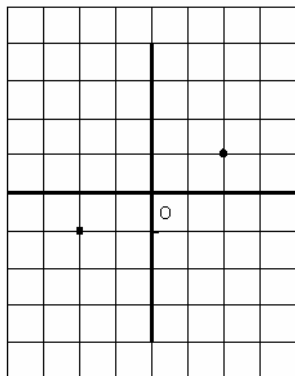


15.

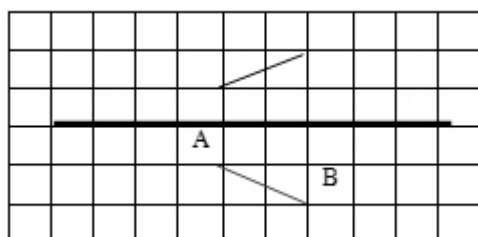


16. Si hay simetría.

17.

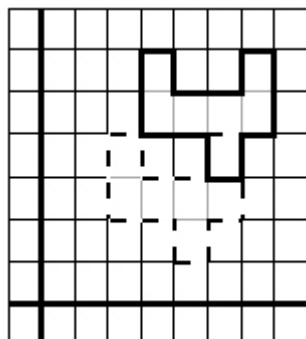


18.

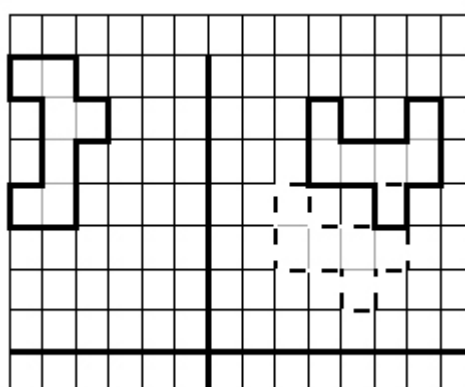


19.

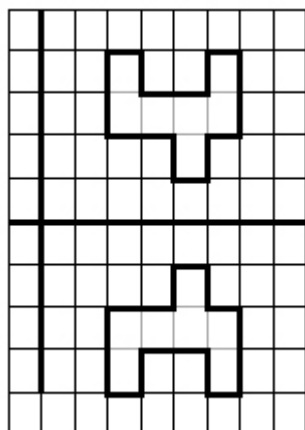
a)



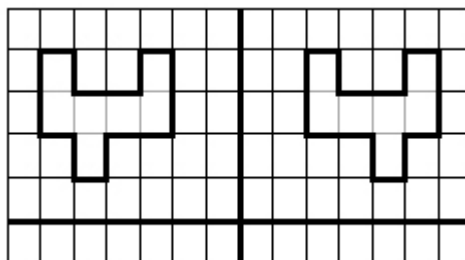
b)



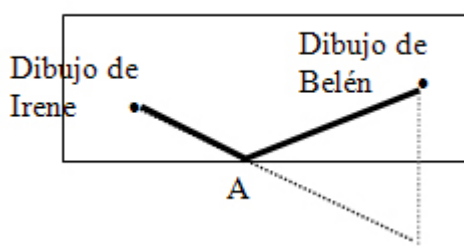
c)



d)



20. Sabemos que el balón debe botar en cualquier punto entre Irene y Belén. Hay muchas posibilidades pero si buscamos aquella en la que el balón tiene menos recorrido, recordamos que el camino más corto es la línea recta.



Dibujamos el simétrico al punto en el que recoge el balón Belén. La longitud más corta es la del segmento que va de Irene al simétrico del punto en que recoge Belén el balón. Si consideramos que debe botar una vez, se debe producir en el punto A.

21. Cualquier cenefa con un cuadrado rojo y un rectángulo azul.

22. El motivo que genera el friso es 

APLICA LO QUE SABES

1. Simetría axial
2. Doblando el papel y superponiendo los planos
3. Un giro de centro la esquina inferior derecha y amplitud de giro 90° más una traslación.
4. Simetrías axiales y traslaciones

5. Se podrían hacer simetrías axiales con ejes que pasaran por la parte central del piso

EL RETO

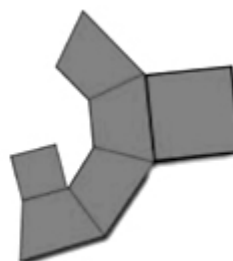
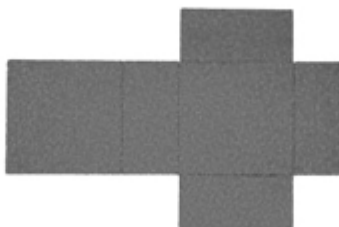
Basta realizarla en forma de rombo de diagonales ambas de 3 pies, con lo que tiene forma de cuadrado girado 90°

UNIDAD 10. FIGURAS EN EL ESPACIO I

1. Los dos poliedros son convexos.

2. $c = 7$ $v = 10$ $a = 15$ $7 + 10 = 15 + 2$. SÍ

3.



4. Porque la suma de los ángulos interiores que concurren en un vértice ha de ser MENOR a 360° (y aquí sería igual a 360°)

5. En común, que las caras son paralelas dos a dos. Se diferencian en que en el ortoedro las caras son rectángulos y en el cubo siempre cuadrados.

6. Volumen = 500.000 l.

7. Aproximadamente $348,25 \text{ cm}^2$

8. 13 cajas, sobrando un poco del cartón.

9. a) $34,64 \text{ cm}^3$ b) $620,12 \text{ cm}^3$ c) 70 cm^3

10. 4 cm

11. 6, 15 y 24 cm, respectivamente.

12. Diagonal = $5\sqrt{3} \approx 8,66 \text{ cm}$.

13. Área = 150 cm^2
 Volumen = 125 cm^3

14.



15. Área = $187,2 \text{ cm}^2$

16. Volumen = 35 cm^3

17. Irregular.

18. Costará unos 16,32 euros.

19. Volumen del tetraedro = $\frac{32}{6}\sqrt{2} \approx 7,54 \text{ cm}^3$

20. Área = $323,1 \text{ cm}^2$

21. El ortoedro tiene menos planos de simetría que el cubo, pues en éste, los planos que pasan por las diagonales de dos caras paralelas son de simetría, mientras que en el ortoedro no.

22. 9 planos de simetría.

23. 7 planos de simetría.

24. Sí, por ejemplo uno de base irregular y oblicuo.

25. Tiene 6 ejes de orden 2, 4 de orden 3 y 3 de orden 4.

APLICA LO QUE SABES

1. 1000 cm^3 .

2. $(30-2x)(20-2x)x$

3. Sí que cabrá tumbado. Si no lo está podría caber uno de casi 23 cm.

4. Unos $3,5 \text{ cm}^3$.

5. 78 mm^3 . Dos terceras partes.

6. 6156 cm^3 .

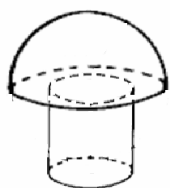
EL RETO

La condición es que se obligaba a dibujarlo en el plano y para solucionarlo hay que formar un tetraedro (cuatro caras triangulares iguales) con las seis cerillas.

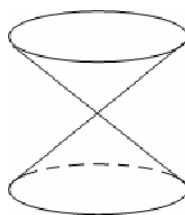
UNIDAD 11. FIGURAS EN EL ESPACIO II

1.

a)



b)



2. El largo del rectángulo (25 cm) no coincide con la longitud de la circunferencia de las bases ($2\pi r \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 5 = 31,4$ cm).

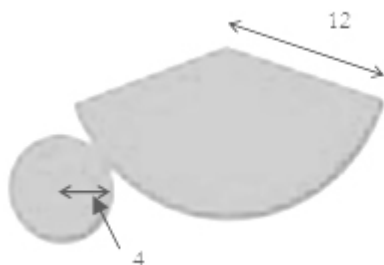
3. Se obtiene un cilindro de diámetro de las bases igual a 6 cm.

4. a) Área = 96π cm² Volumen = 256π cm³
 b) Área = 464,96 cm² Volumen = 769,69 cm³

5. Área = 277,47 cm²

6. Área = 32π cm²

7.



8. Altura = 6,71 cm

9. La generatriz ha de ser siempre mayor que el radio de la base del cono, pues la generatriz es la hipotenusa y el radio es un cateto del triángulo rectángulo que genera el cono.

10. Área = 97,7 cm² Volumen = 57,6 cm³

11. Generatriz = 3,5 cm.

12. Área = 496,37 cm² y Volumen = 758,31 cm³.

13. 668,97 cm² de tela para forrar el cubilete por dentro.

14. Altura del reloj de arena = 22 cm.

15. a) Área = 45π cm² Volumen = 138,03 cm³
 b) Área = 66,49 cm² Volumen = 43,98 cm³

16. Área = 200,71 cm² Volumen = 205,25 cm³

17. Una semiesfera.

18. Infinitas circunferencias máximas (todas las obtenidas al cortar la esfera por un plano que pase por el centro).

19. Volumen = $1,083 \cdot 10^{12}$ km³.

20. Área = 305,27 cm² Volumen = 471,29 cm³

21. Unos 4114,2 km.

22. 21.252.686 km² de superficie un huso horario.

23. 536,17 cm³ de aire en el interior del bote.

24. Volumen = 65,45 dm³.

25. Unos 0,899 m³ de agua en el recipiente.

APLICA LO QUE SABES

1. 4 cm de diámetro

2. Unos 4 cm.

3. La esfera tiene unos 113 cm³ de volumen por lo que sí rebosará el vaso de 200 cm³ si esté está lleno hasta la mitad.

4. En un 11% aproximadamente.

5. Hasta unos 13,5 cm de altura.

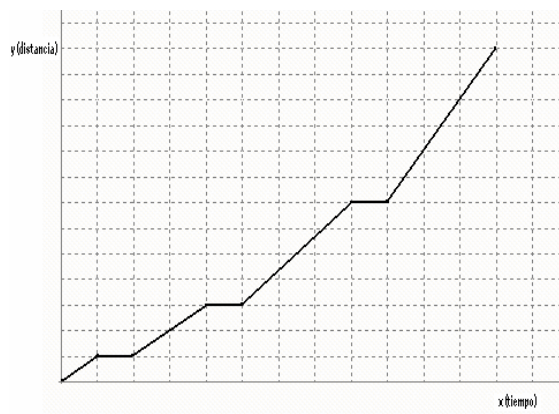
EL RETO

2,55 cm de altura.

UNIDAD 12. FUNCIONES I

1. x, variable independiente, tiempo en minutos de 7:40 a 8:25.

y, variable dependiente, distancia en kilómetros o metros de 0 a 13,5 kms.



2. a) El triple de un número menos 7.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-13	-10	-7	-4	-1	2

b) El opuesto de un número.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	2	1	0	-1	-2	-3

c) El inverso de un número.

x	-2	-1	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-\frac{1}{2}$	-1	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

d) Un número más 5 al cuadrado.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	1	4	9	16	25	36	49

3. a) $y = 2x - 4$;

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-8	-6	-4	-2	0	2

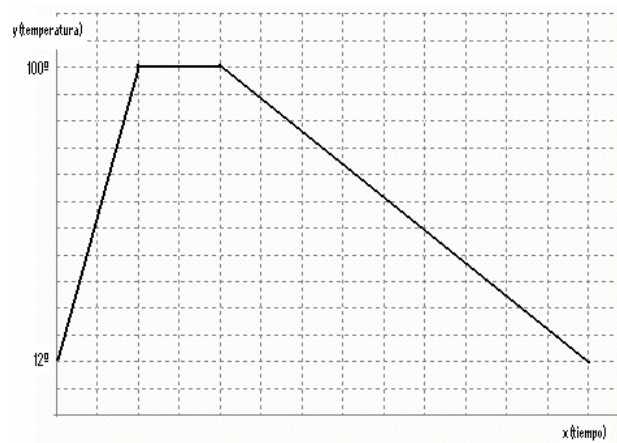
b) $f(5) = 6$; $f(-2) = -8$.

c) El origen de 2 es 3. El origen de 3 es $\frac{7}{2}$.

4. a. $Dom = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$ b. $Dom = \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{2}\}$

c. $Dom = [6, +\infty)$ d. $Dom = [-4, +\infty)$

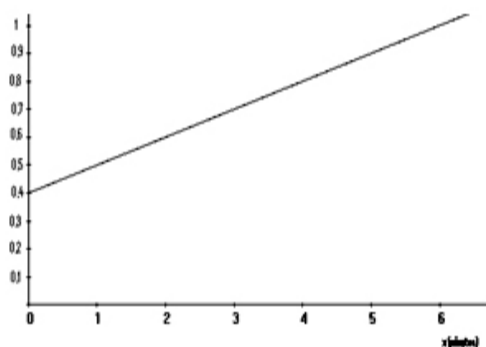
5.



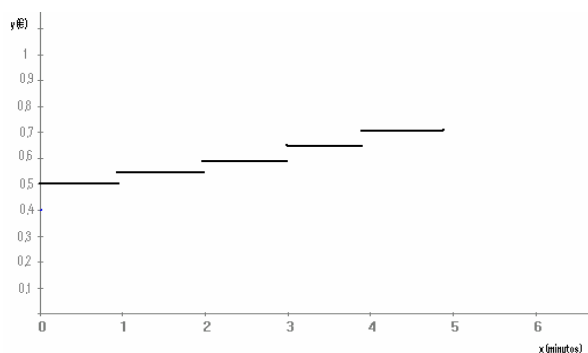
6. a. $Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$ b. $Dom = [3, +\infty)$
 c. $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 5\}$ d. $Dom = [-2, +\infty)$

7.

a) Compañía 1:



Compañía 2:



b) El dominio de las dos funciones es de 0 a ... minutos.

El recorrido de la 1ª es de 0,4 € en adelante y el de la 2ª es de 0,5 € en adelante.

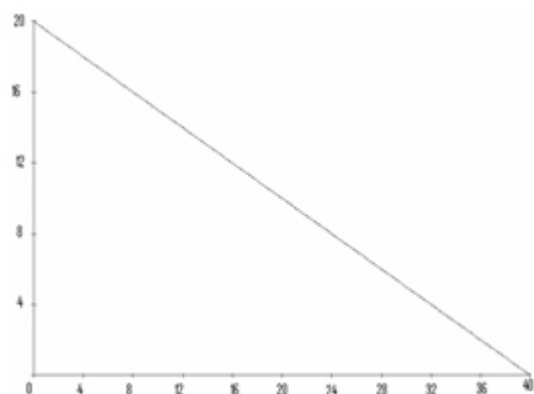
c) La 1ª función es continua en todos los números.
 La 2ª es discontinua en 1, 2, 3, 4, 5, ...

8. a.

Longitud	30	25	20	15	10
Anchura	5	7,5	10	12,5	15

b. $y = (40-x)/2$.

c.

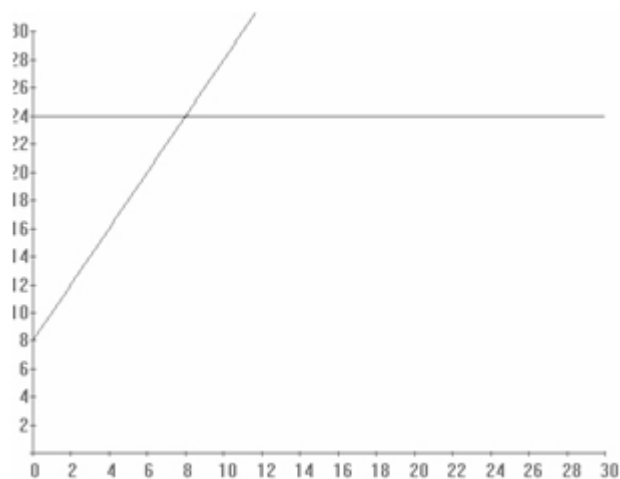


Si tiene sentido unir los puntos porque podemos coger medio metro, por ejemplo.

d. $\text{Dom } f(x) =$ de 0 a 40 metros. $\text{Img } f(x) =$ de 0 a 20 metros.

9. a. Depende de los días que vaya, si voy menos de 8 días, me interesa la 2ª forma de pago y si voy más de 8 días la 1ª (24 € fijos)

b.



c. $\text{Dom } f_1 = \text{Dom } f_2 =$ días del mes. $\text{Im}f_1 = 24$; $\text{Im}f_2 =$ de 8 € en adelante.

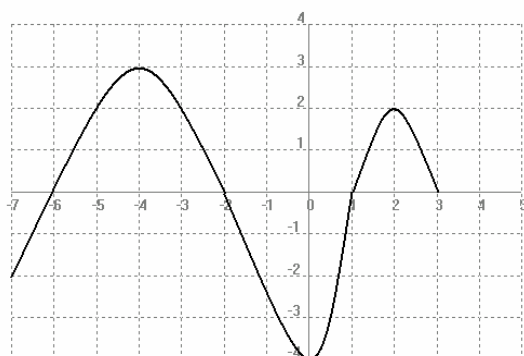
d. (8,24), si vas 8 días al gimnasio pagas lo mismo de las dos formas, 24 €.

e. Forma de pago 1, no es creciente ni decreciente, es una función constante. No es simétrica y es periódica, cada mes se repite.

Forma de pago 2, es creciente, no es simétrica y sí periódica, cada mes se repite.

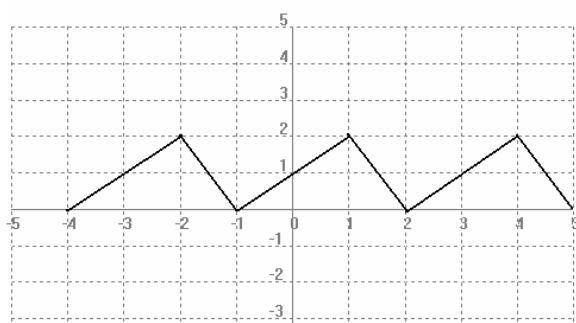
También se pueden considerar las funciones discretas, contando sólo los días en el eje x.

10.



a.

b.



c. Para gráfica a:

Crecimiento: de -7 a -4; de 0 a 2.

Decrecimiento: de -4 a 0; de 2 a 3.

Para gráfica b:

Crecimiento: de -4 a -2; de -1 a 1; de 2 a 4.

Decrecimiento: de -2 a -1; de 1 a 2 y de 4 a 5.

11. Gráfica 1:

Crecimiento: de -6 a -3; de -1 a 1; de 5 a 6. Decrecimiento: de 1 a 3. Constante: de -3 a -1; de 3 a 5.

$$TV[-1,1] = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

Gráfica 2:

Crecimiento: de -5,5 a -2; de 2 a 5. Decrecimiento: de -7 a -5,5; de -2 a 2.

$$TV[-2,-1] = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{3 - 4}{1} = -1$$

12. a. $Dom f = [-2, +\infty)$ $Im f = [0, +\infty)$

b. $Dom f = (0, +\infty)$ $Im f = (-\infty, +\infty)$

13. a. $TVM(8,10) = 0,75$; $TVM(13,14) = -1$.

b. Crece de: 8 a 9; 12 a 13; 14 a 16 y 17 a 19. Decrece de: 10 a 11; 13 a 14 y 19 a 20. Es constante de: 9 a 10; 11 a 12 y 16 a 17.

c. Máximos: (13, 38.5°); (19, 39.5°). Mínimos: (8, 37.5°); (14, 37.5°); (20, 38°).

d. A las 19 horas. A las 8.

14. a. Domf = de 0 a 35 minutos.

Imf = de 0 a 13 kms.

b. Crece de 0 a 10; de 20 a 30 y de 32,5 a 35. Decrece de 15 a 17,5. Es constante de 10 a 15; de 17,5 a 20 y de 30 a 32,5.

La función es decreciente porque el autobús retrocede.

c. 10 minutos. 2 km

d. Es una función periódica, se repite de lunes a viernes cada semana. Periodo de 35 minutos.

15. a. 100€.

b. No hay de 13 a 15 y de 18 a 19. A que esté cerrada o no haya clientes.

c. Crecimiento: de 11 a 13; de 15 a 18 y de 19,5 a 21. Decrecimiento: de 19 a 19,5.

d. A que han pagado un pedido con dinero de la caja.

e. De 18 a 19.

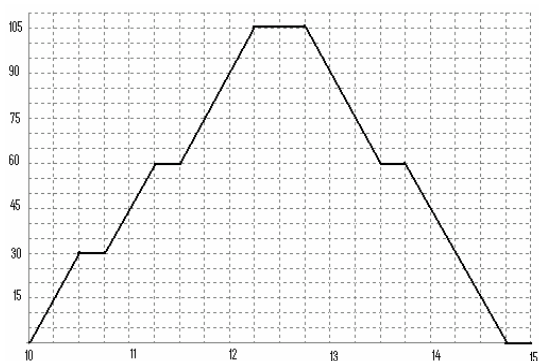
f. De 11 a 21 horas (quizá con descanso de 13 a 15).

16. a. 13 kms en 4 horas.

b. 3 kms y 3 km/h.

c. En el CD menos, 2km/h y en el BC 4km/h. Se debe a que el tramo CD es cuesta arriba y el BC es cuesta abajo.

17.



18.

a. Simetría respecto (0,0).

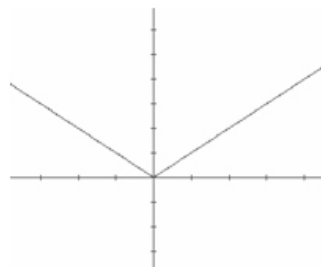
b. Simetría respecto (0,0).

c. Simetría respecto recta $x = 1$.

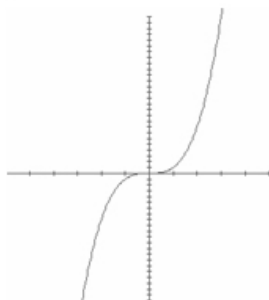
d. Simetría respecto eje y ó recta $x = 0$.

19.

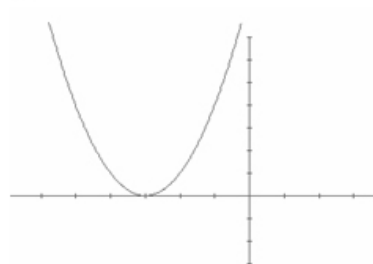
a.



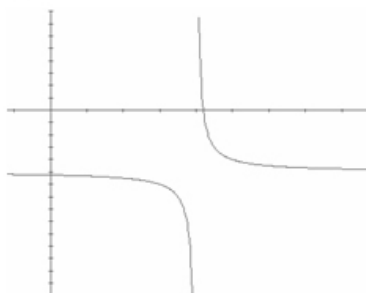
b.



c.



d.



APLICA LO QUE SABES

1. Dominio es de Enero a diciembre, un año.

2. En el mes de Mayo, que lo visitan 5000 personas.

3. En Febrero.

Que Febrero tiene menos días que el resto de meses del año (febrero 28 y enero y marzo 31 días).

Puede influir que en Enero hay vacaciones y en Marzo puede haber vacaciones de Semana Santa , pero no hay en Febrero.

4. Creo que no porque en periodos vacacionales hay menos visitas.

5. De Marzo a Abril. Con el cambio de estación de invierno a primavera y el cambio de hora.

6. 4500 visitantes

EL RETO

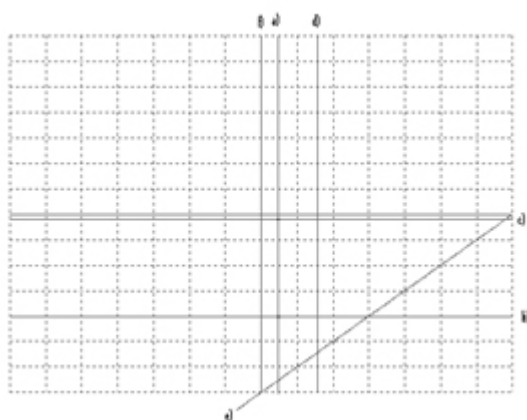
No, es una gráfica de la velocidad que llevaba en cada momento.

UNIDAD 13. FUNCIONES II

1. Funciones afines: $r_1: y = x$; $r_2: y = 4x$; $r_3: y = -1/3 x$

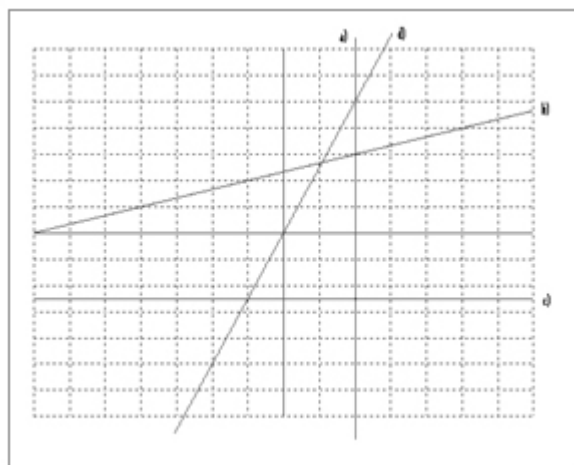
Funciones lineales: $r_1: y = 1/4 x + 2$; $r_2: y = -5x - 3$; $r_3: y = -3/2 x + 4$

2.



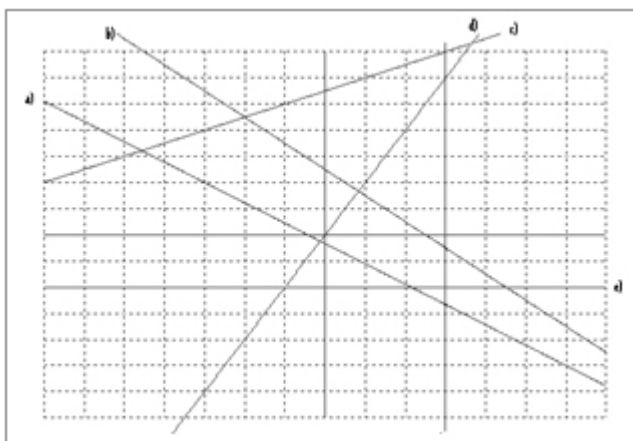
3.

- a) $m = \text{infinito}, n = 0$.
- b) $m = 1/3, n = 7/3$.
- c) $m = 0, n = -5/2$.
- d) $m = 5/2, n = 2$.



4. Rectas:

- a) $y = -7x/9 - 1/3$
- b) $y = -x + 5/2$
- c) $y = x/2 + 11/2$
- d) $y = 2x$
- e) $y = -2$
- f) $x = 3$



5. No están alineados porque C no está en la recta que pasa por los puntos A y B, que es $y = -3x + 5$.

6. $-10 \cdot \frac{3}{5} + b \cdot (-2) = 4$; $-6 - 2b = 4$; $-2b = 4 + 6$; $-2b = 10$; $b = 10 / -2 = -5$.

7. a) $y = -2x$; b) $y = -\frac{4}{9}x$; c) $x = 0$; d) $y = 0$.

8. a) $y = 6x + 5$; b) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$; c) $y = \frac{3}{4}$.

Ecuaciones en forma general:

a) $-6x + y = 5$; b) $-4x + 6y = 3$; c) $4y + 0x = 3$.

9. a) $y = -\frac{1}{4}$; b) $y = 2x + 11$; c) $y = \frac{7}{2}x - 7$; d) $y = 12x + \frac{36}{5}$.

10. a) $y = -\frac{1}{3}x + 4$; b) $y = -7x - 17$; c) $y = 2x + 2$; d) $y = \frac{x}{2} + 2$; e) $y = -2$; f) $x = 0$.

11. Sí, son los dos.

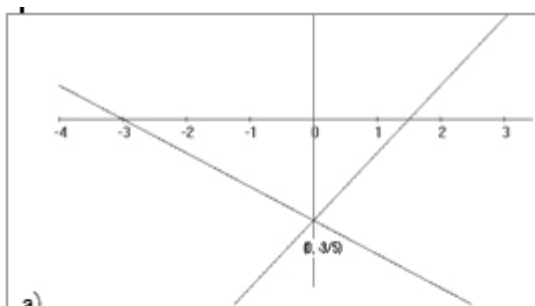
12. a) $b = \frac{7}{2}$; b) $c = -22$.

13. a) Recta que pasa por A, B: $y = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ y C no pertenece a esta recta, así que A, B y C no están alineados.

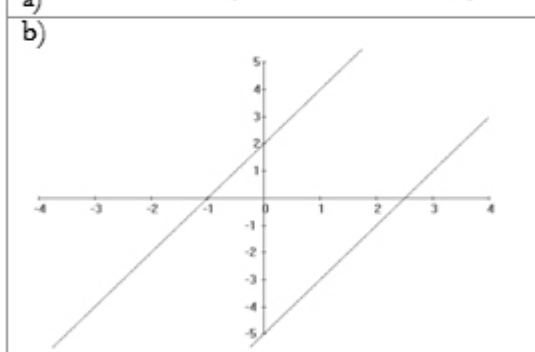
b) Recta que pasa por A, B: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$ y C sí está en la recta que pasa por A, B, así que A, B y C están alineados.

14.

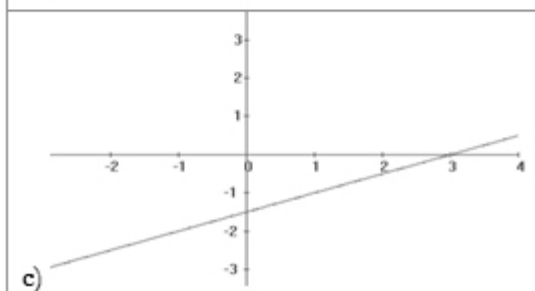
$$a) \begin{cases} y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} \\ y = \frac{-x}{5} - \frac{3}{5} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{a) Pendientes} \\ \text{distintas, son rectas} \\ \text{secantes.} \end{array}$$



$$b) \begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{b) Pendientes} \\ \text{iguales y distinta n,} \\ \text{así que son rectas} \\ \text{paralelas.} \end{array}$$



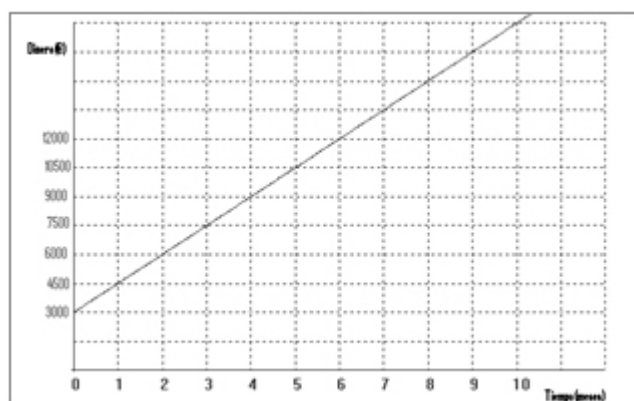
$$c) \begin{cases} y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{c) Igual pendiente y} \\ \text{ordenada en el} \\ \text{origen, son la misma} \\ \text{recta, rectas} \\ \text{coincidentes.} \end{array}$$



15. a) con 2); b) con 3); c) con 4) y d) con 1).

16. a) $y = 1500x + 3000$ (Se unen los puntos porque se considera que nos pueden cobrar por semanas o días)

b) 21000€

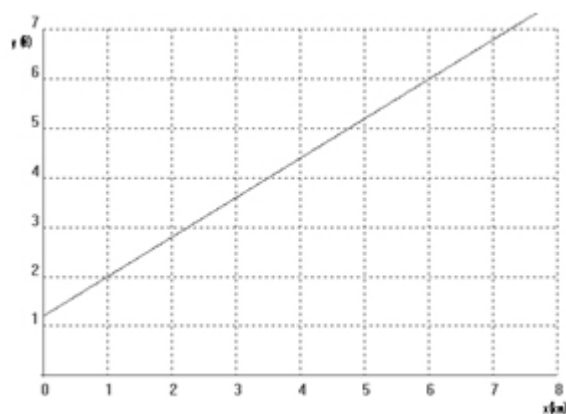


17.

a)

x (kms)	0	1	2	3	5	10
y (€)	1,20	2	2,8	3,6	5,2	9,2

$y = 1,2 + 0,8x$.



b) $x = 5$ kms he recorrido.

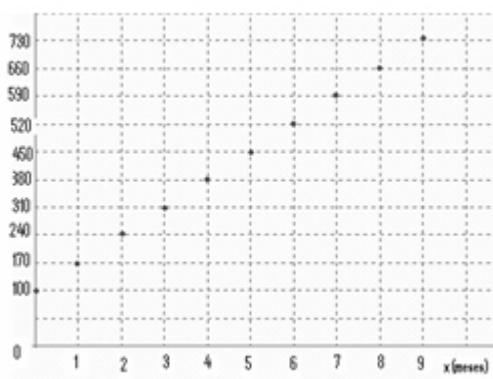
18.

a) $y = 100 + 70x$, x = meses; y = dinero.

$x = 0, 1, 2, 3, \dots$

b) No se unen los puntos porque se cobran mensualidades completas. También se podrían haber considerado los meses en vez de puntos como intervalos, la función sería constante con discontinuidades.

c) $y = 100 + 70 \cdot 4 = 380€$.



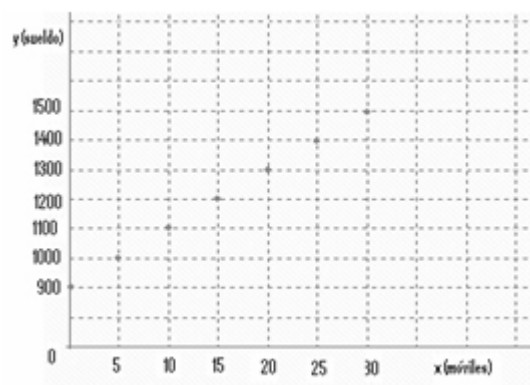
19.

a)

x	0	5	10	15	20	25
y	900	1000	1100	1200	1300	1400

b) $y = 900 + 20x$; x = móviles vendidos, y = sueldo.

c) No se pueden unir los puntos puesto que los móviles se venden de unidad en unidad.



20. $y = 20 + 3x$, $x = n^\circ$ de papeletas, $y =$ dinero que se gasta.

No se unen los puntos porque las rifas se compran de una en una.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	20	23	26	29	32	35	38	41	44

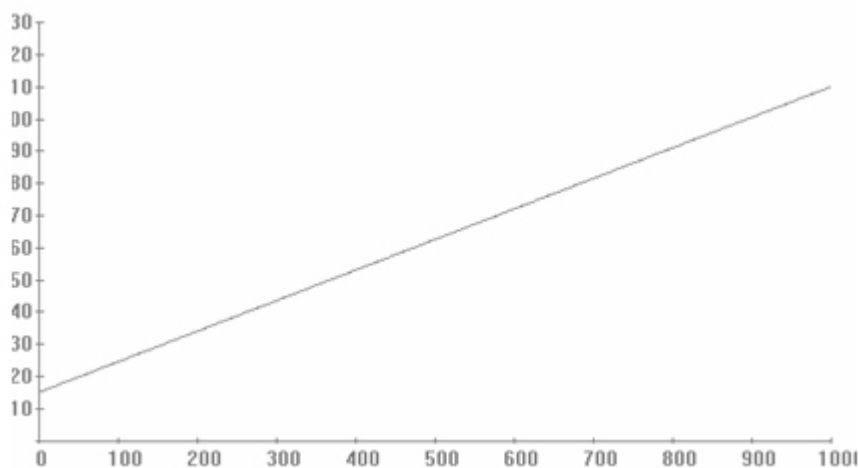
APLICA LO QUE SABES

1. 15,13 €.

2. $y = 0,095x + 15,13$; $x =$ consumo en kwh e $y =$ precio de la factura. Es una función lineal.

3.

x	y
500	62,63
1000	110,13
1500	157,63
2000	205,13



4. 15,13 €, representa el gasto fijo de la factura de la luz, aunque no se consuma nada.

5. 680 kwh. Por ejemplo al uso de la calefacción en esos dos meses y en los anteriores no, o a estar fuera de casa de vacaciones en la factura anterior.

6. 76,1 €. $y = 0,095X + 11,5$.

EL RETO

A los 25.000 km anuales.

UNIDAD 14. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

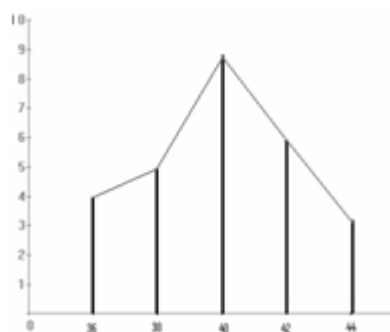
1. a) Cuantitativa discreta.
 b) Cuantitativa continua.
 c) Cualitativa.
 d) Cuantitativa discreta.
 e) Cuantitativa continua.
 f) Cualitativa.

2. a) Cuantitativa continua. Sueldo mensual en un país.
 b) Cuantitativa continua. Altura de puertas de una fábrica.
 c) Cuantitativa discreta. Número de hermanos de tus compañeros de clase
 d) Cualitativa. Color de pelo de los miembros de tu familia.

3. a)

x_i	36	38	40	42	44	Total
f_i	4	5	9	6	3	27
h_i	0,148	0,185	0,3	0,2	0,1	1
p_i	14,8	18,5	33,3	22,2	11,1	100%

b) Cuantitativa discreta.

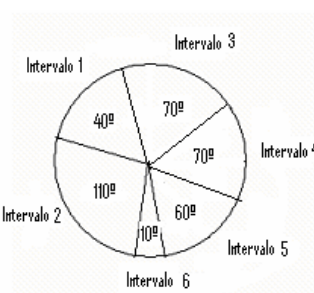
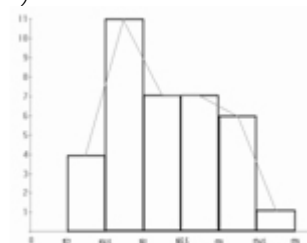


4. a)

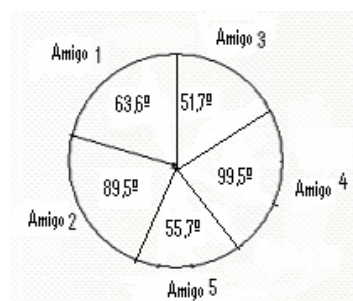
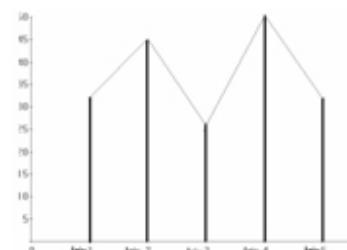
x_i (intervalos)	f_i	Marca clase
$(152, 156,5]$	4	154,25
$(156.5, 161]$	11	158,75
$(161, 165,5]$	7	163,25
$(165.5, 170]$	7	167,75
$(170, 174,5]$	6	172,25
$(174.5, 179]$	1	176,75

b) Cuantitativa continua.

c)



5. a)



b) Variable: “Número de pulseras”. Cuantitativa discreta. Tamaño muestral = 181.

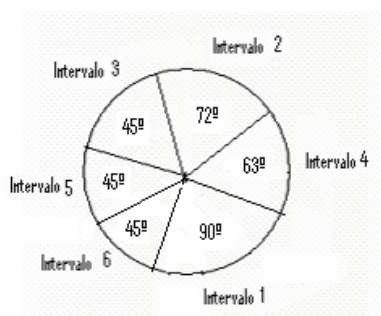
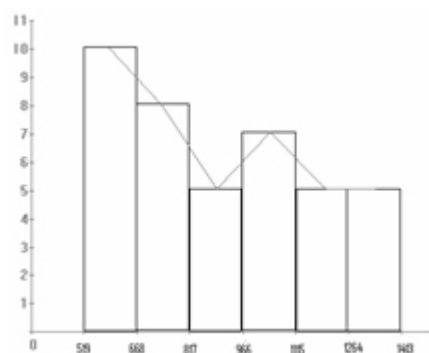
c) Amigo 1: 38,4€; Amigo 2: 54€;

Amigo 3: 31,2 €; Amigo 4: 60€; Amigo 5: 33,6€.

6. a)

x_i (intervalos)	f_i	Marca clase
$(519, 668]$	10	593,5
$(668, 817]$	8	742,5
$(817, 966]$	5	891,5
$(966, 1115]$	7	1040,5
$(1115, 1264]$	5	1189,5
$(1264, 1413]$	5	1338,5

b)



7.

x_i	%	h_i	f_i
Galicia	40	0,4	300
Cataluña	28	0,28	210
Andalucía	20	0,2	150
Castilla y León	12	0,12	90

En Galicia han tenido lugar 300 incendios y en Castilla y León 90.

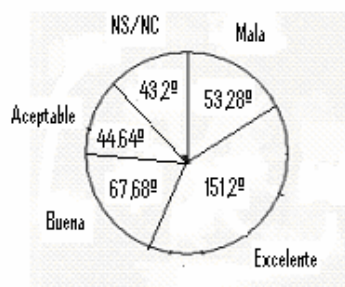
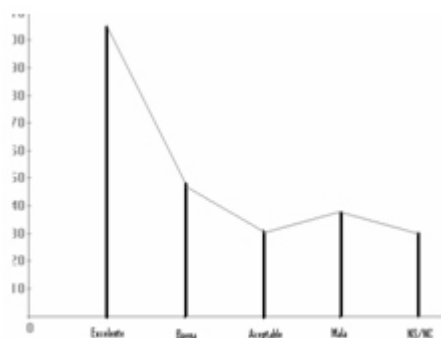
8. a) 250 encuestados.

b)

RESPUESTAS	% p_i	f_i	h_i
EXCELENTE	42	105	0,42
BUENA	18,8	47	0,188
ACEPTABLE	12,4	31	0,124
MALA	14,8	37	0,148
NS/NC	12	30	0,12

c) Variable: opinión sobre la actuación de la comisión de festejos. Cualitativa.

d)



9. a) $\bar{x} = 3,36$ $\sigma = 1,25$

b) $Me = 3$.

c) Se les ha preguntado a 97 personas y entre todos tienen 326 coches.

10. a) $\bar{x} = 2,475$

x_i (intervalos)	f_i	Marca clase
$(1.1, 1.6]$	1	1,35
$(1.6, 2.1]$	14	1,85
$(2.1, 2.6]$	11	2,35
$(2.6, 3.1]$	5	2,85
$(3.1, 3.6]$	6	3,35
$(3.6, 4.1]$	3	3,85

b) $R = 2,7$. $DM = 0,5625$. $\sigma = 0,66$

c) La desviación típica representa la diferencia media entre la altura de los pinos y su media aritmética.

11. a) $\bar{x} = 132,75$. $Me = 132,5$. $Q_1 = 77,5$. $Q_3 = 185$.

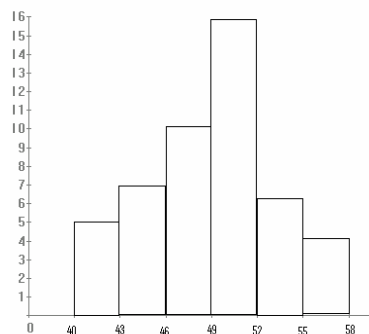
b) $R = 190$. $DM = 52,25$. $\sigma = 59,34$

c) Puede deberse a que se haga la compra para familias con un solo miembro o con varios.

12. a) $\bar{x} = 48,93$.

b) $DM = 3,44$. $\sigma = 4,24$.

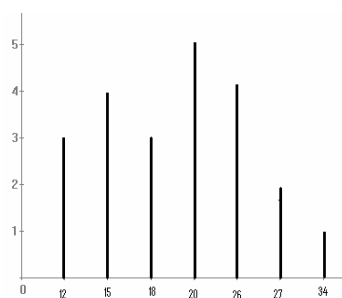
c)



13. a) Variable: “Móviles vendidos en un mes”. Cuantitativa discreta. $N = 22$.

b)

x_i	1	15	18	20	26	27	34
	2						
f_i	3	4	3	5	4	2	1

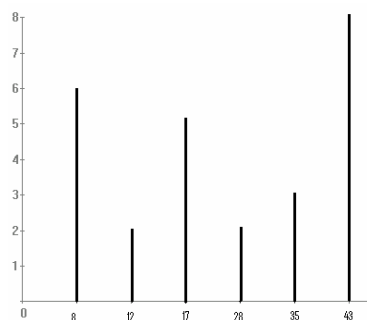


c) $\bar{x} = 20,09$. $Me = 20$. $Mo = 20$.

d) $R = 22$. $DM = 4,67$. $\sigma = 5,81$

14. a)

x_i	8	12	17	28	35	43
f_i	6	2	5	2	3	8



b) $CV_{13} = 29\%$ $CV_{14} = 56\%$.

Hay mayor dispersión de datos en la empresa 2 que en la empresa 1.

15. a) Valores de la variable: 0, 1, 2, 3, 4, y 5. Es v.a. cuantitativa discreta. $N_{\text{abuelos}} = N_{\text{nietos}} = 30$.

b) $\bar{x}_A = 3,47 \quad \sigma_A = 1,33$

$\bar{x}_N = 0,97 \quad \sigma_N = 0,75$

Se puede observar que la media del número de hermanos es mucho mayor para los abuelos que para los nietos, entre las desviaciones típicas no hay mucha diferencia, aunque es un poco más para los abuelos.

c) $CV_A = 38\% \quad CV_N = 77\%$. Es mucho mayor la dispersión de datos en el caso de los nietos. Se debe a que el número de hermanos para los nietos está concentrado en 0 y 1, siendo prácticamente nulos o nulos el resto de valores, mientras que esto no sucede para los abuelos. Los motivos son las actuales tasas de natalidad en comparación con hace 60 años.

16. El precio medio de la vivienda es mucho mayor en la ciudad B que en la ciudad A, pero también la desviación típica, lo que quiere decir que hay viviendas mucho más caras que otras en la ciudad B, mientras que en la ciudad A los precios de las viviendas son más homogéneos.

$CV_A = 14\% \quad CV_B = 56\%$. Con el CV se puede observar que los datos están mucho más dispersos en la ciudad B que en la ciudad A.

17. $CV_A = 53\% \quad CV_B = 6\%$. El número medio de hijos nacidos es mayor en el país A que en el B, sin embargo la variación de los datos es mucho mayor en A que en B, es decir, en el país B se tiene una media entre 1 y 2 hijos y la mayoría de familias están en esta situación, sin embargo en A el número medio de hijos es 3, pero hay familias con muchos hijos y otras con pocos, puesto que la dispersión es muy elevada.

18. $CV_1 = 42\% \quad CV_2 = 87,5\% \quad CV_3 = 60\%$. La variación mayor de las áreas suspensas para septiembre es para la clase 2, le sigue la 3 y por último la clase 1. Cuanto mayor sea el CV más dispersión hay entre los datos, es decir, en la clase 2 aunque la media de áreas suspensas sea 4, hay muchos alumnos que suspenden muchas y muchos que no suspenden ninguna.

19. a) $\bar{x} = 671,875 \quad Me = 670,5 \quad R = 468 \quad \sigma = 139,41$

b) $\bar{x} = 691,875 \quad Me = 690,5 \quad R = 468 \quad \sigma = 142,25$

Se puede observar que la media y la mediana en b) son las del apartado a) pero sumados 20 €, el rango sigue siendo el mismo. Esto es por la propia definición de los parámetros. Sin embargo la desviación típica varía

porque intervienen cuadrados y $\frac{\sum (x_i + 20)^2}{8} = \frac{\sum x_i^2}{8} + 400 + 40 \frac{\sum x_i}{8}$

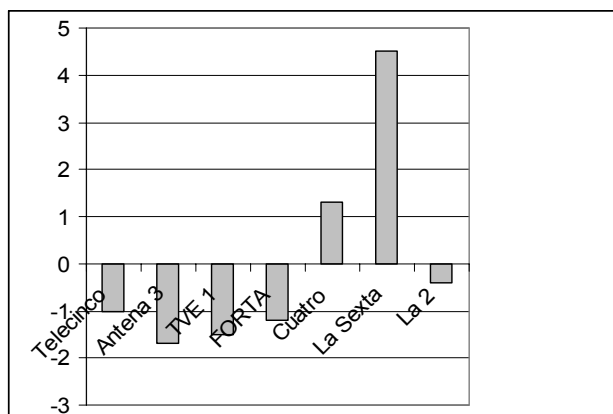
Si restáramos 20 €, la media y la mediana serían 20 unidades menos, el rango se mantendría y la desviación

típica cambiaría y ahora $\frac{\sum (x_i - 20)^2}{8} = \frac{\sum x_i^2}{8} + 400 - 40 \frac{\sum x_i}{8}$.

APLICA LO QUE SABES

1. Porque hay más canales, los autonómicos, los de pago...

2.



Gracias al mundial Cuatro y, sobre todo la Sexta, mejoraron sus resultados.

3. El aspecto es muy diferente porque en el primer gráfico la escala va de 5 en 5 y en el 2º va de 1 en 1, lo que hace que las diferencias se noten mucho más. Beneficia a Telecinco.

4. Con el 1º, si fuera directivo de Telecinco y con el 2º si lo fuera de Antena 3.

EL RETO

Al aumentar el diámetro por dos el área se multiplica por 4, por lo que está desproporcionado.

UNIDAD 15. PROBABILIDAD

1.

a. Aleatorio

b. Determinista

c. Aleatorio

d. Aleatorio

e. Aleatorio

f. Aleatorio

2. Si conocemos el número de cerillas en el experimento no es aleatorio ya que podemos predecir el resultado en cuanto conozcamos el número de jugadores.
3. $E = \{CB, CV, XB, XV\}$
- 4.
- CIERTO
COMPUESTO
IMPAR
CONTRARIO
MUESTRAL
INTERSECCIÓN
IMPOSIBLE
ALEATORIO
DETERMINISTA
5. Escribimos el espacio muestral.
- $E = \{MLI, MIL, LMI, LIM, IML, ILM\}$
6. El espacio muestral es
- $E = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$
7. Las posibilidades que podemos obtener son:
- $E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, XC, XX\}$
8. a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
b) $A = \{6, 7, 8\}$
c) $B = \{2, 4, 6, 8\}$
d) $C = \{\emptyset\}$
e) $\bar{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$
9. La frecuencia relativa es $\frac{90}{100} = 0,9$
10. Al escribir cada elemento lo expresamos con 3 letras V ó M según corresponda. La primera es el/la hijo/a mayor, la segunda el/la hijo/a mediano/a y el/la último/a el/la pequeño/a
- a) $E = \{VVV, VVM, VMM, VMV, MVM, MVV, MMV, MMM\}$
- b) $A = \{VVV, VVM, VMM, VMV, MVM, MVV, MMV\}$
- c) $B = \{VVV, VVM, VMM, VMV\}$
- d) $C = \{VVM, VMM, MVM, MMM\}$

11.

a) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b) $A \cap B = \{2, 4, 7\}$

c) $\bar{A} = \{1, 3, 6\}$

d) $\bar{B} = \{1, 3, 5, 8\}$

12. Se aproxima a 0,3 ya que cuando el número de veces que realizamos el experimento crece la frecuencia relativa tiende a aproximarse a un número que llamamos probabilidad, en este caso hay 12 figuras, 40 cartas

$$p(\text{figura}) = \frac{12}{40} = 0,3$$

13. a) En la primera urna la probabilidad de obtener una bola roja es $\frac{3}{10}$ y en la segunda $\frac{4}{10}$ por lo tanto es más probable en la segunda urna.

b) En la primera urna la probabilidad de obtener una bola blanca es $\frac{2}{10}$ y en la segunda $\frac{2}{10}$ por lo tanto es igual de probable en las dos urnas.

c) En la primera urna la probabilidad de obtener una bola amarilla es $\frac{5}{10}$ y en la segunda $\frac{4}{10}$ por lo tanto es más probable en la primera urna.

14. $p(\text{ganar}) = \frac{3}{100}$

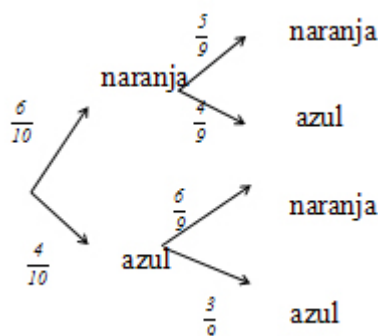
15. a) $p(\text{número mayor que } 8) = 0$

b) $p(\text{número par}) = \frac{1}{2}$

c) $p(\text{número mayor que } 0) = 1$

16. $p(\text{amigo}) = \frac{40}{130} = \frac{4}{13}$

17. a) Para escribir el espacio muestral realizamos un diagrama de árbol.



$$a) E = \{n - n, n - a, a - n, a - a\}$$

$$b) P(\text{naranja-naranja}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$c) P(\text{las dos bolas sean de distinto color}) =$$

$$P(\text{naranja-azul}) + P(\text{azul-naranja}) =$$

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

$$d) P(\text{azul-azul}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

$$18. p(\text{toque el primer premio}) = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}$$

$$19. a) p(\text{sea niño}) = \frac{22}{52} = \frac{11}{26}$$

$$b) p(\text{no sea niño}) = \frac{30}{52} = \frac{15}{26}$$

20. Hay 1235 defectuosas.

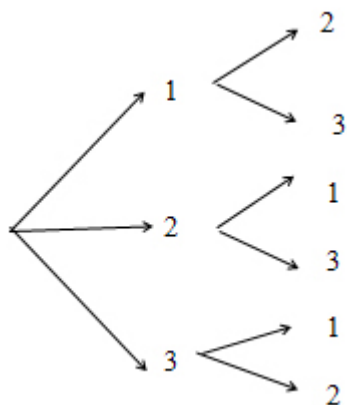
$$21. p(\text{sea un as}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$22. a) p(\text{bola se roja}) = \frac{4}{7}$$

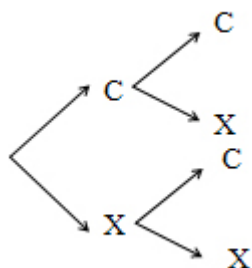
$$b) p(\text{bola sea verde}) = \frac{3}{7}$$

$$23. p(\text{carta extraída sea oros}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

24.

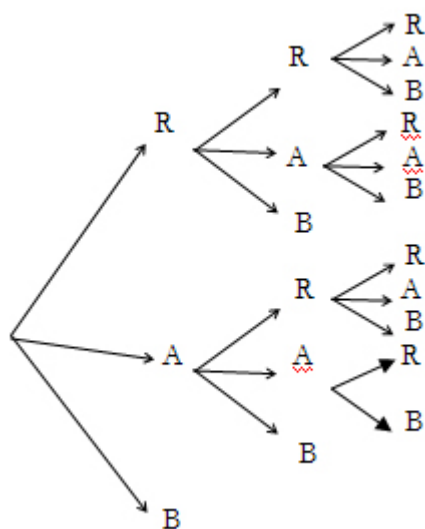


25.



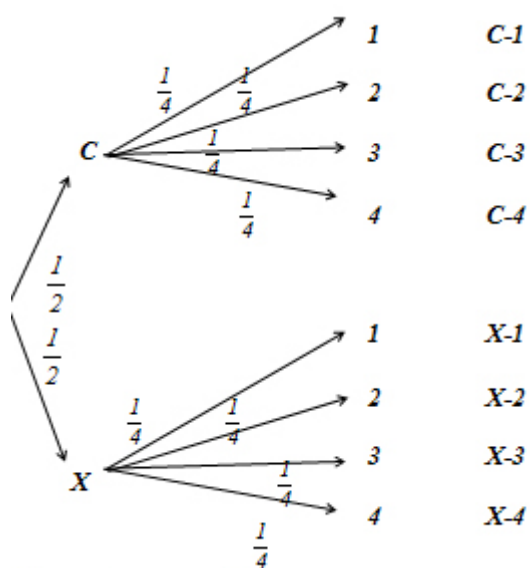
$$E = \{CC, CX, XC, XX\}$$

26.



$$E = \{RRR, RRA, RRB, RAR, RAA, RAB, \\ RB, ARR, ARA, ARB, AAR, AAB, AB, B\}$$

27.

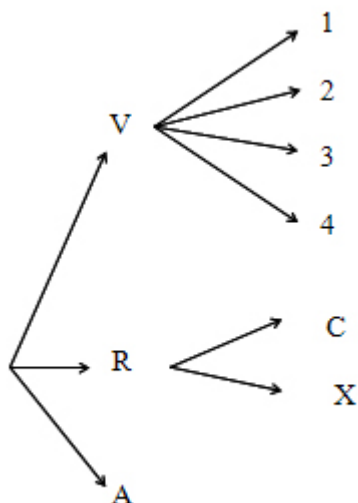


$$\text{El espacio muestral es: } E = \{C-1, C-2, C-3, X-1, X-2, X-3\}$$

28.

- a) Lanzar un dado en forma de tetraedro
Simple
- b) Extraer una carta de una baraja francesa.
Simple
- c) Lanzar dos dados.
Compuesto
- d) Extraer una carta y lanzar un dado.
Compuesto
- e) Sacar una bola de una urna.
Simple
- f) Elegir una letra del alfabeto
Simple.

29.



$$E = \{V1, V2, V3, V4, RC, RX, A\}$$

30. En el lanzamiento de cada uno de los dados tenemos 36 posibilidades.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Aplicamos la Ley de Laplace:

$$P(\text{el producto de los n}^\circ\text{s obtenidos sea 12}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

31.

$$E = \{RR, RA, RB, AR, AA, AB, BB, BA, BR\}$$

$$P(\text{las dos rojas}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{4}$$

APLICA LO QUE SABES

1. Ese número ocupa una bola igual que cualquier otro.
2. Cada número ocupa una bola y son todas igual de probables por lo que esa combinación también lo es
3. El bombo “no recuerda” lo que pasó ayer.
4. Son posibilidades pero que no son igualmente probables
5. No hay base real para ello. No influye lo anterior en la probabilidad de los nuevos hijos

EL RETO

Aunque parezca mentira C, ya que si le toca disparar a cualquiera de los otros, tenderá a matar al que no es C y, si le toca a este, le basta con disparar al aire.

ÍNDICE

• UNIDAD 1. NÚMEROS RACIONALES.....	6
• UNIDAD 2. NÚMEROS REALES.....	14
• UNIDAD 3. PROPORCIONALIDAD.....	22
• UNIDAD 4. EXPRESIONES ALGEBRAICAS.....	30
• UNIDAD 5. ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.....	38
• UNIDAD 6. SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS	46
• UNIDAD 7. SUCESSIONES	54
• UNIDAD 8. GEOMETRÍA PLANA. FIGURAS EN EL PLANO	60
• UNIDAD 9. MOVIMIENTOS EN EL PLANO.....	66
• UNIDAD 10. FIGURAS EN EL ESPACIO I.....	74
• UNIDAD 11. FIGURAS EN EL ESPACIO II.....	80
• UNIDAD 12. FUNCIONES I.....	86
• UNIDAD 13. FUNCIONES II.....	94
• UNIDAD 14. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA.....	100
• UNIDAD 15. PROBABILIDAD.....	106

SOLUCIONES	113
-------------------	-----

